Solución del Segundo Parcial - Probabilidad y Estadística

Jueves 4 de julio del 2013

MO1	MO2	MO3	MO4
E	D	B	F

Problema 1

(1) Para conseguir una densidad se debe tener que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a/2 + b = 1$. Además, $E(X) = a/3 + b/2 = 25/48$, y resolviendo se consigue $a = 1/4$ y $b = 7/8$.
(2) De la tabla de Rachas con $R = 4$ y $n = 8$ se obtiene el p-valor $\alpha^* = 0,3124$. El estadístico de Spearman es $r_s = 0,2619$ y su p-valor $\alpha^* = 0,268$, por lo que a nivel $\alpha = 0,05$ no se rechaza la aleatoriedad de la muestra.
(3) La distribución F_0 asociada a f vale 0 para $x < 0$, 1 en $x \geq 0$ y
$F_0(x) = \int_0^x (1/4t + 7/8)dt = x^2/8 + 7/8x$ si $0 \leq x < 1$.
(4) Aplicando el test de Kolmogorov-Smirnov para decidir si H_0 $F_X = F_0$ o H_1 :no H_0, se consigue el estadístico $KS = 0,7753 > 0,457$, por lo que se rechaza la hipótesis nula a nivel $\alpha = 0,05$.

Problema 2

(1) $log(X_1), \ldots, log(X_n)\, iid N(\mu, \sigma^2)$, y por LFGN tenemos que $\hat{\mu} = log(\prod_{i=1}^n X_i)/n$ es estimador insesgado para μ. Un IdeC exacto para μ es $I_\alpha = [\hat{\mu} - \frac{s_n t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + \frac{s_n t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}]$, siendo $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (log(X_i) - \hat{\mu})^2$.
(2) Análogamente, un IdeC para σ^2 es $[\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}]$.
(3) Si $\alpha = 0,05$ con la muestra de estudio, el IdeC para μ es $[1.388; 2.904]$, con lo cual $\mu < 5$ con certeza mayor que $0,95$.
(4) Análogamente, como $s_n^2 = 0,821$ para σ^2 se tiene $I_{0,05} = [0.359; 3.40]$, y no podemos suponer que $\sigma^2 > 36$.

Múltiple Opción 1

La verosimilitud es $L(\theta) = (2\theta)^{-n}(\prod_{i=1}^n \sqrt{X_i})^{-1}$, si $0 < X_i \leq \theta^2$, y 0 en caso contrario. Se debe elegir el menor θ que verifique $X_i \leq \theta^2$, es decir, $\theta = \sqrt{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}$. Un cálculo directo permite comprobar que $E(X) = \theta^2/3$, y el método de los momentos sugiere el estimador $\sqrt{3\overline{X}_n}$, por lo que la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 2

$\alpha = P_{H_0}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} < k) = 1 - e^{-n\lambda_1 k}$, y despejando se consigue la opción D.

Múltiple Opción 3

Se observa que el volumen de la región $R_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\}$ coincide con la probabilidad de que tres uniformes en [0,1] indpendientes queden ordenadas: $U_1 < U_2 < U_3$. Por simetría tal probabilidad vale $1/3! = 1/6$, por existir $3! = 6$ ordenamientos equiprobables. El volumen de $R_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\}$ es también 1/6. Luego, el volumen de $S = R_1 \cup R_2$ es 1/3, y la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 4

Las variables $(Y_n)_{n\geq 1}$ no son independientes, pues $P(Y_2 > 2k/Y_1 < k) = 0$. La distribución de una suma de variables exponenciales independientes es nuevamente exponencial, con la suma de las tasas, por lo que $E(Y_n) = n\frac{1}{n\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, y la opción correcta es la F.