Solución Segundo Parcial - Probabilidad y Estadística

28 de Junio de 2012

C[1]	D	D	E	A

Problema 1 (10 puntos)

(a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_1^{+\infty} bx^{-K} = \frac{b}{K-1}$. Luego $b = K-1$.
(b) $E(X) = (K-1)\int_1^{+\infty} x^{-K+1}dx = \frac{K-1}{K-2}$. Análogamente, $E(X^2) = \frac{K-1}{K-3}$.
(c) Por la Ley Fuerte: $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} \frac{K-1}{K-2}$. Despejando para K tenemos que $\hat{K} = \frac{1-2\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n}$.
Sustituyendo con $\overline{X}_n = 6/5$ tenemos que $\hat{K} = 7$.
(d) Con $K = 7$ tenemos que $E(X) = \frac{12}{10}$, $E(X^2) = \frac{15}{10}$ y $Var(X) = \frac{6}{100}$. Mediante el TCL:

$$P(\overline{X}_{36} < \frac{11}{10}) \approx P(Z < \frac{\left(\frac{11}{10} - \frac{12}{10}\right)}{\sqrt{6/100}} \times \sqrt{54}) = \phi(3) = 0,9987.$$

Problema 2 (15 puntos)

(a) Se reconoce la distribución de estudio como una exponencial trasladada un tiempo $T > 0$.
Luego $P(X > x) = e^{-\lambda(x-T)}$ para $x > T$.
(b) Por la aditividad de la esperanza: $E(X) = \frac{1}{\lambda} + T$. Por la Ley Fuerte $\overline{X}_n \xrightarrow[n]{c.s.} E(X)$.
(c) Sabiendo que $\lambda = 3$, un estimador consistente para T es $\overline{T} = \overline{X}_n - \frac{1}{3}$. Sustituyendo se obtiene que $\overline{T} = 2,037$ minutos.
(d) La verosimilitud es $\mathcal{L}(T) = \lambda^n + e^{\lambda(nT - \sum_{i=1}^n X_i)}$, si $\min\{X_1, \dots, X - n\} \geq T$.
Puesto que la verosimilitud es creciente con T, se maximiza con $\hat{T} = \min\{X_1, \dots, X_n\} = 2,08$ minutos. Evidentemente, el humano puede cortar una llamada en un tiempo anterior a dos minutos. La deficiencia en esta estimación se debe posiblemente al escaso tamaño de la muestra (contemplando miles de llamadas se observará alguna en el orden de segundos, o menor).

Problema 3 (15 puntos)

(a) Se obtiene directamente que $E(X-\mu) = 0$ y $E((X-\mu)^2) = 2b^2$.
Luego $E(X) = \mu$ y $Var(X) = 2b^2$.
(b) A partir del TCL:

$$\alpha = P(|\overline{X_n} - \mu| > \epsilon) \approx P(|Z| > \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2b^2}}) = P(|Z| > \sqrt{2}\epsilon).$$

Luego, el radio del intervalo es $\epsilon = \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2}} = 1,163$, y el intervalo es $I = [36,837; 39,163]$.
(c) La verosimilitud es $\mathcal{L}(\mu) = \frac{1}{(10)^n} e^{-\frac{1}{5}\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|}$, que se maximiza minimizando la suma $\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$. Este mínimo se consigue cuando μ es la mediana de las muestras $X_1, \dots, X_n$.
(d) $P(|X-\mu| > 2b) = 2\int_{\mu+2b}^{+\infty} \frac{1}{2b} e^{-\frac{1}{2b}\frac{x-\mu}{b}} dx = \int_2^{+\infty} e^{-t} = e^{-2}$, donde se ha hecho el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{b}$.

[1] La opción D también se toma correcta, debido a distintas estimaciones de la constante $z_{0,9}$.