PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO PARCIAL, 28 de Junio de 2010

DATOS DEL ESTUDIANTE

No. de Parcial	Nombre y Apellido	Cédula

- **La duración del parcial es de 4 horas.**
- **Publicación de resultados: Lunes 12 de Julio, 20hs.**
- **Muestra de parciales: Martes 13 de Julio, 18hs.**

	1	2	3	4	Totales
Pr.1					
Pr.2					
Pr.3					
Total					

Problema 1 (20 puntos)

Se considera una variable aleatoria X absolutamente continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } b > 0$$

Se sabe que $\mathrm{E}(X) = a$ y $\mathrm{Var}(X) = 2b^2$. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con la misma distribución que X.

1. Determinar estimadores de a y b aplicando el método de los momentos.
2. Calcular la mediana de X. Determinar un nuevo estimador consistente de a distinto del hallado en la parte anterior.
3. Para el caso $a = 0$, determinar el estimador de b de máxima verosimilitud.
4. Para el caso $a = 0$, hallar la función de distribución de $Y = |X|$. Si es una distribución conocida, indique cuál es.

Problema 2 (20 puntos)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con distribución $\mathcal{U}[0,\theta]$ con $\theta > 0$.

1. Hallar un estimador consistente de θ. Justificar.
2. Sea $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, probar que $\widehat{\sigma} = \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{3}}$ es un estimador consistente de σ. Calcular $\mathrm{E}(\widehat{\sigma})$ y $\mathrm{Var}(\widehat{\sigma})$.
3. Probar que $I_\alpha = \left[2\overline{X}_n - 2\frac{\overline{X}_n z_{\alpha/2}}{\sqrt{3n}}, 2\overline{X}_n + 2\frac{\overline{X}_n z_{\alpha/2}}{\sqrt{3n}}\right]$ es un intervalo de confianza aproximado (usando TCL) a nivel α para θ.
4. Se desea realizar el siguiente test de hipótesis sobre θ: $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0 \end{cases}$.
   (a) Probar que $\mathcal{R}_\alpha = \left\{\frac{\theta_0}{2\overline{X}_n} \leq 1 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{3n}}\right\}$ es una región crítica aproximada a nivel α para el test planteado.
   (b) Suponiendo que $n = 27$, $\alpha = 0.05$, $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 2$ y $\overline{X}_n = 1.25$, calcular aproximadamente $\beta = P(\text{error tipo II})$.

Problema 3 (20 puntos)

Se tienen los siguientes datos sobre victorias de la selección de fútbol de Uruguay sobre las principales selecciones sudamericanas y México[1].

Selección	Argentina	Brasil	Chile	Paraguay	Perú
Partidos Jugados	182	71	72	67	61
Victorias Uruguay	58	21	42	31	33
Promedio Victorias (PV)	**0.32**	**0.3**	**0.58**	**0.46**	**0.54**

Selección	Ecuador	Bolivia	Colombia	Venezuela	México
Partidos Jugados	41	39	36	27	17
Victorias Uruguay	29	27	18	18	3
Promedio Victorias (PV)	**0.71**	**0.69**	**0.5**	**0.67**	**0.18**

1. Estudiar si el promedio de victorias celestes puede considerarse una muestra iid. Realizar dos tests de hipótesis.
2. ¿Es posible afirmar que el promedio de victorias celestes se ajusta a una distribución normal? Basta realizar un test de hipótesis.
3. ¿Se puede afirmar con un nivel de confianza de 0.95 que la media de la variable PV es inferior a 0.5?
4. ¿Se puede afirmar con un nivel de confianza de 0.95 que la varianza de la variable PV es $\sigma_0^2 = 0.05$?

[1] datos obtenidos en www.wikipedia.org