Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2009
Segundo Parcial, 30 de junio de 2009

Duración de la prueba: 3 horas y media.

N^o de Parcial	Cédula	Apellido y Nombre	Salón

Parte de Múltiple Opción (Total: 20 puntos)

Respuesta correcta: 4 puntos	**Respuesta incorrecta: -1 punto**	**Respuesta en blanco: 0 punto**

1. Considere las variables aleatorias X, con distribución exponencial de parámetro 2 e Y, independiente de X, con distribución exponencial de parámetro λ, desconocido. Sea M la variable aleatoria definida de la siguiente forma: $M = \min\{X, Y\}$. Sabiendo que, en una muestra de 100 realizaciones de la variable M $(M_1, M_2, \cdots, M_{100})$, la suma de los datos vale 17, dar una estimación de λ.

   A. $\frac{1}{2} - 0,17$.
   B. $\frac{1}{0,17} - 2$.
   C. $\frac{1}{2 - 0,17}$.
   D. $\frac{1}{0,17}$.
   E. $2 - 0,17$.

2. Sean X, Y y Z tres variables aleatorias tales que $\mathrm{E}(X) = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{E}(Z) = 3$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 9$, $\mathrm{Var}(Z) = 4$. Sean las siguientes expresiones:

   i. $\mathrm{E}(X(Y + Z))$
   ii. $\mathrm{Var}(2X + 3Y)$
   iii. $\mathrm{Var}(3Z + 4)$

   Indicar la opción correcta:

   A. No hay suficientes datos para calcular ninguna de las expresiones.
   B. Sólo hay suficientes datos para calcular **(iii)**.
   C. Hay suficientes datos para calcular todas las expresiones.
   D. Sólo hay suficientes datos para calcular **(i)** y **(iii)**.
   E. Sólo hay suficientes datos para calcular **(ii)** y **(iii)**.

3. Se pretende construir, a partir del valor promedio $\bar{X}$ de una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \cdots, X_n$ con distribución normal con media μ y varianza $1,44$, un intervalo de confianza 95% para μ. De los siguientes valores, ¿cuál es el tamaño de muestra mínimo que asegura que la longitud del intervalo será, a lo sumo 0,06?

   A. 4330.
   B. 1083.
   C. 1537.
   D. 6147.
   E. 8852.

4. Sea X una variable aleatoria con distribución Binomial Negativa de parámetros n y p (la variable que modela el número de intentos hasta el n-ésimo éxito, en repeticiones independientes con probabilidad de éxito p en cada una de ellas). Suponga que n es lo suficientemente grande, de modo que es válida la aproximación del Teorema del Límite Central. ¿Cuál de las siguientes aproximaciones utilizaría para la variable X?

A. $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$.

B. $\sqrt{n}\, \dfrac{X - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$.

C. $\dfrac{Xp - n}{\sqrt{n(1-p)}} \sim N(0,1)$.

D. $\sqrt{n}\, \dfrac{Xp - 1}{\sqrt{(1-p)}} \sim N(0,1)$.

E. $\sqrt{np}\, \dfrac{X - 1/p}{\sqrt{(1-p)}} \sim N(0,1)$.

5. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

tal que sus entradas X_1, X_2, X_3, X_4 son variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli de parámetro p. Sea Z el determinante de A. Z es una variable aleatoria cuya varianza vale:

A. $2p^2 - 2p^4$.

B. $p^2(1-p^2)$.

C. $p^2 - p^3$.

D. p^2.

E. $p\,(1-p)$.

MÚLTIPLE OPCIÓN: POR FAVOR, **LLENAR CON LETRAS MAYÚSCULAS**

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
RESPUESTA					

NO LLENAR. PARA USO DOCENTE

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**D.1.**	**D.2.**	**TOTAL**
PUNTAJE								

Parte de desarrollo (Total: 40 puntos)

(En esta parte no se penalizan los errores con puntajes negativos)

Ejercicio 1. (18 puntos)
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$.

a. (3 puntos) Hallar $\mathrm{E}(X_1)$.

b. (3 puntos) Hallar un estimador $\widehat{\alpha}_1$ de α por el método de los momentos.

c. (3 puntos) Hallar $\mathrm{E}(X_1^2)$.

d. (3 puntos) Usando la parte anterior, hallar un estimador $\widehat{\alpha}_2$ de α por el método de los momentos, diferente del anterior.

e. (6 puntos) Hallar el estimador $\widehat{\alpha}_3$ de α por el método de máxima verosimilitud. (Se probará que efectivamente corresponde a un máximo).

Ejercicio 2. (22 puntos) Se dispone de la siguiente muestra, a la que llamaremos A:

0,82	0,05	0,28	0,23	0,73	0,30	0,04	0,55	0,21	0,47

a. (8 puntos) Hacer dos pruebas de hipótesis para estudiar si es razonable afirmar que la muestra es i.i.d.

b. (7 puntos) Aplicar la prueba de ajuste de Lilliefors para ver si es razonable afirmar que los datos tienen distribución exponencial.

Considere una segunda muestra a la que llamaremos B:

0,09	0,07	0,18	0,17	0,08	0,03	0,20	0,16	0,10	0,11

c. (7 puntos) Aplicar la prueba de **Kolmogorov-Smirnov para dos muestras**, para ver si es razonable afirmar que las muestras A y B tienen la misma distribución.

Nota: En todas las pruebas, trabaje al nivel $\alpha = 0,10$