

**PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO PARCIAL 2006**

DATOS DEL ESTUDIANTE

No. de Parcial	Nombre y Apellido	Cédula	Firma

- La duración del parcial es de: **3 horas y media.**
- Publicación de resultados: **miércoles 19 de julio hora 20:00.**
- Muestra de parciales: **viernes 21 de julio hora 19:00.**
- Indique el nombre del **docente del teórico** al que concurre:
- Indique el nombre del **docente del práctico** al que concurre:

Problema 1 (30 puntos)

Sean X, Y variables aleatorias $iid \sim \mathcal{U}[0, \mathbf{a}/2]$ (Uniforme en el intervalo $[0, \mathbf{a}/2]$) con $\mathbf{a} > 0$, y sea $L = X + Y$.

1. **(4 puntos)** Hallar $E(L)$ y $Var(L)$.
2. **(5 puntos)** Sean L_1, \dots, L_n iid con la misma distribución que L . Hallar un estimador consistente de \mathbf{a} . Justificar.
3. **(6 puntos)** Suponiendo que $n = 196$, hallar aproximadamente el máximo valor de \mathbf{a} tal que $P(\bar{L}_{196} \leq 2) \geq 0.9$ $\left(\bar{L}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i \right)$.
4. **(15 puntos)** Se toma otra muestra L_1, \dots, L_{196} iid , para la cual $\bar{L}_{196} = 2.026$ y $s_{196}^2 = 0.683$ $\left(s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L}_n)^2 \right)$
 - (a) Hallar un intervalo de confianza al nivel $\alpha = 0.05$ para \mathbf{a} .
 - (b) Se desea testear $\begin{cases} H_0 : \mathbf{a} = 4 \\ H_1 : \mathbf{a} = 7/2 \end{cases}$
 Se toma el siguiente criterio de decisión: si $\bar{L}_{196} \leq 15/8$ se rechaza H_0 , en caso contrario no se rechaza H_0 .
 - i. Hallar aproximadamente $\alpha = P(\text{error tipo I})$ y $\beta = P(\text{error tipo II})$.
 - ii. Hallar aproximadamente el p-valor α^* . Justificar.

PARA USO DOCENTE

1.1	1.2	1.3	1.4	Total 1	2.1	2.2	2.3	Total 2	Total

Problema 2 (30 puntos)

En 5 lugares de una cierta región se miden las partes por millón (p.p.m) de anhídrido sulfuroso (SO₂) en el aire, obteniéndose los siguientes datos:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
129	104	90	111	108

Nota: En las pruebas de hipótesis utilice el siguiente criterio de decisión: se acepta la hipótesis nula si el p -valor es superior a 0.1

- (9 puntos)** ¿Es razonable suponer que la muestra es aleatoria? (realice dos test)
- (9 puntos)** Se sospecha que los datos corresponden a una distribución de Cauchy con función de distribución $F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - 110}{10}\right) + \frac{1}{2}$ (arctan en radianes).
¿Es razonable suponer que los datos efectivamente corresponden a dicha distribución?
- (12 puntos)** En la zona donde se tomaron las medidas anteriores se instala una fábrica. Luego de la instalación de la fábrica, se vuelve a medir la concentración de SO₂ en el aire en 10 lugares diferentes, obteniéndose los siguientes datos:

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}
119	133	86	124	134	137	143	132	349	144

Se supone que la muestra Y es aleatoria e independiente de la muestra anterior X .

- Utilizando un test de comparación indique si es razonable suponer que X e Y tienen la misma distribución.
- Se sabe que el límite crítico de cantidad de SO₂ en el aire es 130 ¿es razonable suponer que luego de la instalación de la fábrica este límite se supera con probabilidad mayor o igual que 1/2? (realice un sólo test)