PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL 2006

Problema 1

1. E(X) $= a/4 =$E(Y); Var(X) $= a^2/48 =$Var(Y); E(L) $= a/2$; Var(L) $= a^2/24$ (al ser X e Y independientes).

2. $\widehat{a} = 2\overline{L}_n$; es insesgado por la ley de los grandes números: $\lim_{n\to\infty} \overline{L}_n = E(L)$ c.s., de donde $\lim_{n\to\infty} 2\overline{L}_n = a$ c.s.

3. $P(\overline{L}_{196} \leq 2) = P\left(\frac{(\overline{L}_{196} - \frac{a}{2})14\sqrt{24}}{a} \leq \frac{(2 - \frac{a}{2})14\sqrt{24}}{a}\right)$. Por el TCL, $E = \frac{(\overline{L}_{196} - \frac{a}{2})14\sqrt{24}}{a}$ es aprox. N(0,1), por lo que la probabilidad pedida es mayor que 0,9 si $\frac{(2 - a/2)14\sqrt{24}}{a}) \geq$ 1.282. Despejando a, $a \leq \frac{28\sqrt{24}}{1.282 + 7\sqrt{24}}$, de donde el mayor valor de a es aproximadamente 3.856.

4. (a) El estadístico $E' = \frac{(\overline{L}_{196} - \mathrm{E}(L))14}{s_{196}}$ tiene una distribución aproximadamente normal. La media y la varianza están relacionadas por una función $\sigma = E(L)/\sqrt{6}$, por lo que también se puede tomar como estadístico (entre otros), el que se obtiene sustituyendo s_{196} por $\overline{L}_{196}/\sqrt{6}$; también tiene distribución aproximadamente N(0,1). Tomando E' como estadístico se tiene como intervalo de confianza $\left[4.052 - \frac{1.96\sqrt{0.683}}{7}; 4.052 + \frac{1.96\sqrt{0.683}}{7}\right] = [3.821; 4.283]$. Tomando $E" = \frac{(\overline{L}_{196} - a/2)14\sqrt{6}}{\overline{L}_{196}}$ como estadístico resulta $\left[4.052 - \frac{1.96 \times 2.026}{7\sqrt{6}}; 4.052 + \frac{1.96 \times 2.026}{7\sqrt{6}}\right] = [3.820; 4.284]$.

   (b) i. Como $E = \frac{(\overline{L}_{196} - \frac{a}{2})14\sqrt{24}}{a}$ tiene distribución aproximadamente normal, puede utilizarse para calcular α y β:

$$\alpha = P\left(\frac{(\overline{L}_{196} - 2)14\sqrt{24}}{4} \leq \frac{((15/8) - 2)14\sqrt{24}}{4}\right) = P(Z \leq -2.14) = 0.016$$

$$\beta = P\left(\frac{(\overline{L}_{196} - (7/4))14\sqrt{24}}{7/2} > \frac{((15/8) - (7/4))14\sqrt{24}}{7/2}\right) = P(Z > 2.45) = 0.007$$

Tomando $E' = \frac{(\overline{L}_{196} - a/2)14}{s_{196}}$ resulta

$$\alpha = P\left(\frac{(\overline{L}_{196} - 2)14}{s_{196}} \leq \frac{((15/8) - 2)14}{s_{196}}\right) = P(Z \leq -2.12) = 0.017$$

$$\beta = P\left(\frac{(\overline{L}_{196} - (7/4))14}{s_{196}} > \frac{((15/8) - (7/4))14}{s_{196}}\right) = P(Z > 2.12) = 0.017$$

Tomando E" resulta

$$\alpha = P\left(\frac{(\overline{L}_{196}-2)14\sqrt{6}}{\overline{L}_{196}} \leq \frac{((15/8)-2)14\sqrt{6}}{\overline{L}_{196}}\right) = P(Z \leq -2.286) = 0.011$$

$$\beta = P\left(\frac{(\overline{L}_{196}-(7/4))14\sqrt{6}}{\overline{L}_{196}} > \frac{((15/8)-(7/4))14\sqrt{6}}{\overline{L}_{196}}\right) = P(Z > 2.286) = 0.011$$

ii. El p-valor se obtiene calculando la probabilidad de cometer un error de tipo I si la región de rechazo es de la forma $\overline{L}_{196} \leq 2.026$. Usando E, resulta $\alpha^* = P\left(Z \leq \frac{(2.026-2)14\sqrt{24}}{4}\right) = P(Z \leq 0.445807) = 0.6721$. Usando E', resulta $\alpha^* = P\left(Z \leq \frac{(2.026-2)14}{\sqrt{0.682}}\right) = P(Z \leq 0.44076) = 0.6703$. Usando E", resulta $\alpha^* = P\left(Z \leq \frac{(2.026-2)14\sqrt{6}}{2.026}\right) = P(Z \leq 0.44009) = 0.6701$.

Problema 2

1. Prueba de rachas: hay 3 rachas, el p-valor es 0.75, se acepta la independencia. Prueba de rangos de Spearman: el estadístico toma el valor -0.2; el p-valor es 0.392, se acepta la hipótesis de independencia.

2. Kolmogorov-Smirnov (una muestra):

i	X_i^*	$F_n(X_i^*)$	$F_0(X_i^*)$	$F_0(X_{i+1}^{*-})$	$\|F_0(X_i^*) - F_n(X_i^*)\|$	$\|F_0(X_{i+1}^{*-}) - F_n(X_i^*)\|$
0	$-\infty$	0	0	0.147583618	0	0.147583618
1	90	0.2	0.147583618	0.32797913	0.052416382	0.12797913
2	104	0.4	0.32797913	0.437167042	0.07202087	0.037167042
3	108	0.6	0.437167042	0.531725517	0.162832958	0.068274483
4	111	0.8	0.531725517	0.845785886	0.268274483	0.045785886
5	129	1	0.845785886	1	0.154214114	0

El máximo en las dos últimas columnas es 0.268; el p-valor es mayor que 0.2, se acepta la hipótesis que la distribución es la propuesta.

3. (a) Kolmogorov-Smirnov (dos muestras)

muestra conjunta	muestra	F_{10}^X	F_{10}^Y	$\|F_{10}^X - F_{10}^Y\|$
86	Y	0	0.1	0.1
90	X	0.2	0.1	0.1
104	X	0.4	0.1	0.3
108	X	0.6	0.1	0.5
111	X	0.8	0.1	0.7
119	Y	0.8	0.2	0.6
124	Y	0.8	0.3	0.5
129	X	1	0.3	0.7
132	Y	1	0.4	0.6
133	Y	1	0.5	0.5
134	Y	1	0.6	0.4
137	Y	1	0.7	0.3
143	Y	1	0.8	0.2
144	Y	1	0.9	0.1
349	Y	1	1	0

$nmD = 35$; el p-valor es igual a 0.061, se rechaza que tengan igual distribución.

(b) Se trata de un test sobre la mediana. Test de signos: hay 7 valores mayores que 130 de los 10 de la muestra, por lo que el test queda $\begin{cases} H_0 : m_F = 130 \\ H_1 : m_F > 130 \end{cases}$ El p-valor es la probabilidad que $P(U \geq 7) = 1 - P(U \leq 6) = 1 - 0.83 = 0.17$, por lo que se acepta la hipótesis nula.

Test de rangos signados: El estadístico de la prueba es $W = 36$, con valor esperado, bajo la hipótesis nula, de 55/2. El test queda: $\begin{cases} H_0 : m_F = 130 \\ H_1 : m_F > 130 \end{cases}$. El p-valor es 0.216, por lo que se acepta la hipótesis nula.