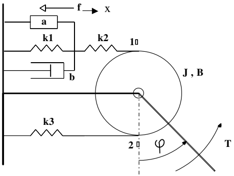
SyC - Hoja 4 - Ej. 3

3) Se considera el brazo mecánico de la figura que trabaja en forma horizontal. El movimiento del mismo está limitado por los topes **1** y **2** correspondiendo a un rango $0 < \varphi < \pi$.

Los puntos de unión entre los resortes y el disco están hechos mediante hilos flexibles e inextensibles, de manera que los esfuerzos sobre el disco, transmitidos por los hilos, son siempre tangentes frente a cada tope. Se considera que para todo el rango de variación de φ la fuerza en los hilos es de tracción.
El sistema está construido de forma tal que con $T = 0$ y $f = 0$, el brazo está equilibrado en $\varphi = 0$, cumpliéndose $k_3 = k_1.k_2/(k_1+k_2)$.
Se considera despreciable la masa de los resortes y de la varilla.
El bloque A es un actuador que aplica una fuerza **f** al sistema, comandada eléctricamente por un voltaje **V**. La función de transferencia de este subsistema es una constante **a**.



Visto desde arriba

a) Plantear las ecuaciones de estado del brazo mecánico, considerando φ como variable de salida y tomando como vector de estados:

$$\left[x, \quad \varphi, \quad \dot{\varphi}\right]^t$$

b) En adelante se considera el ejemplo numérico siguiente:
$K_1 = K_2 = 0{,}166$ N/cm; $b = 0{,}1$ N.s/cm; $r = 5$ cm; $a = 1$ N/V
$J = 2{,}293$ N.cm.s^2/rad; $B = 1{,}605$ N.cm.s/rad; $T = 0$ N.cm
Hallar la función de transferencia entre **V** y φ.

c) Estando el brazo posicionado en $\varphi = \pi/2$, $d\varphi/dt = 0$, con $x = 0$, se aplica un escalón en el voltaje de **2 V**. Hallar la respuesta del brazo $\varphi(t)$.

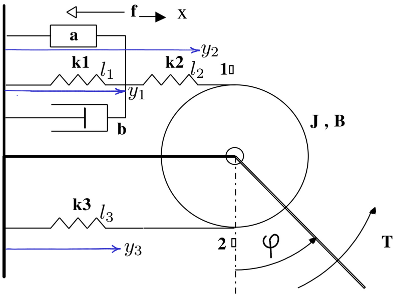
Usando MATLAB (Ver Cap. 3 de "Usando MatLab para resolver problemas de Control"):

d) Ingresar el modelo matricial en un programa y obtener la función de transferencia a partir del mismo.

e) En las condiciones de la parte c):
e1) Obtener y graficar la evolución temporal de todos los estados.
e2) Ingresar la expresión analítica de $\varphi(t)$ hallada en la parte c) y evaluarla con el mismo vector de tiempos usado en la parte e1). Comparar con resolución en MATLAB.

Parte a

Modelado



Segunda ley de Newton aplicada al punto sobre el que actúa el actuador:

$$-k_1\left(y_1 - l_1\right) + k_2\left(y_2 - y_1 - l_2\right) - b\dot{y}_1 - aV = 0$$

Segunda ley de Newton para la rotación aplicada al disco:

$$T + k_2\left(y_2 - y_1 - l_2\right) r - k_3\left(y_3 - l_3\right) r - B\dot{\varphi} = J\ddot{\varphi}$$

Parte a
Modelado

$$-k_1\left(y_1-l_1\right)+k_2\left(y_2-y_1-l_2\right)-b\dot{y}_1-aV=0$$
$$T+k_2\left(y_2-y_1-l_2\right)r-k_3\left(y_3-l_3\right)r-B\dot{\varphi}=J\ddot{\varphi}$$

En equilibrio:

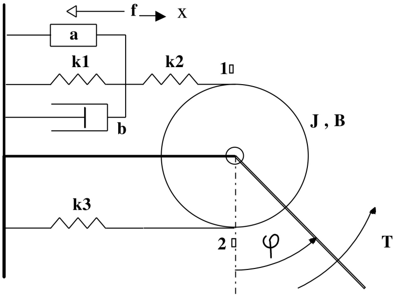
$$-k_1\left(y_1^0-l_1\right)+k_2\left(y_2^0-y_1^0-l_2\right)=0$$
$$k_2\left(y_2^0-y_1^0-l_2\right)r-k_3\left(y_3^0-l_3\right)r=0$$

Sea x tal que: $x=y_1-y_1^0$. Además, $y_2=y_2^0-r\varphi$ y $y_3=y_3^0+r\varphi$. Entonces:

$$-k_1\left(y_1^0+x-l_1\right)+k_2\left(y_2^0-r\varphi-y_1^0-x-l_2\right)-b\dot{x}-aV=0$$
$$T+k_2\left(y_2^0-r\varphi-y_1^0-x-l_2\right)r-k_3\left(y_3^0+r\varphi-l_3\right)r-B\dot{\varphi}=J\ddot{\varphi}$$

Parte a

Modelado



$$-k_1 x - k_2 (x + r\varphi) - b\dot{x} - aV = 0$$

$$T - k_2 (x + r\varphi) r - k_3 r^2 \varphi - B\dot{\varphi} = J\ddot{\varphi}$$

Parte a

Representación en variables de estado

$$\begin{cases} b\dot{x} = -k_1 x - k_2\left(x + r\varphi\right) - aV \\ J\ddot{\varphi} = T - k_2\left(x + r\varphi\right) r - k_3 r^2 \varphi - B\dot{\varphi} \end{cases}$$

Representación en variables de estado:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{b} & -\frac{k_2 r}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_2 r}{J} & -\frac{(k_2+k_3)r^2}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{a}{b} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \end{cases}}$$

Entrada: $\begin{bmatrix} V & T \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$
Salida: $\begin{bmatrix} \varphi \end{bmatrix}$
Estado: $\begin{bmatrix} x & \varphi & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

Parte b

Función de transferencia entre V y φ

$$\begin{cases} b\dot{x} = -k_1 x - k_2 \left(x + r\varphi\right) - aV \\ J\ddot{\varphi} = \underbrace{T}_{0} - k_2 \left(x + r\varphi\right) r - k_3 r^2 \varphi - B\dot{\varphi} \end{cases}$$

Consideramos cond. iniciales no nulas previendo la parte c:

$$\begin{cases} b\left[sX(s) - x(0)\right] = -\left(k_1 + k_2\right) X(s) - k_2 r \Phi(s) - aV(s) \\ J\left[s\left(s\Phi(s) - \varphi(0)\right) - \dot{\varphi}(0)\right] = -k_2 r X(s) - \left(k_2 + k_3\right) r^2 \Phi(s) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - B\left(s\Phi(s) - \varphi(0)\right) \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$X(s) = \frac{bx(0) - aV(s) - k_2 r \Phi(s)}{bs + k1 + k2}$$

Parte b

Respuesta = respuesta natural + respuesta forzada

Sustituyendo $X(s)$ en la segunda ecuación:

$$\Phi(s) = \Phi_n(s) + \Phi_f(s)$$

donde

$$\Phi_n(s) = \frac{-k_2 rbx(0) + (bs + k_1 + k_2)(Js + B)\varphi(0) + (bs + k_1 + k_2)J\dot{\varphi}(0)}{P(s)}$$

$$\Phi_f(s) = H(s)V(s)$$

$$\begin{aligned} P(s) &= \left[Js^2 + Bs + (k_2 + k_3) r^2\right](bs + k_1 + k_2) - k_2^2 r^2 \\ &= Jbs^3 + \left[Bb + J(k_1 + k_2)\right] s^2 + \left[b(k_2 + k_3) r^2 + B(k_1 + k_2)\right] s \\ &\quad + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) r^2 \\ H(s) &= \frac{\Phi}{V}(s) = \frac{k_2 ra}{P(s)} \end{aligned}$$

La función de transferencia entre V y φ es $H(s)$

Parte c

Respuesta a un escalón de $2\,\mathrm{V}$ partiendo del reposo desde $x = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$

La entrada es un escalón: $V(s) = \frac{V_0}{s}$, donde $V_0 = 2\,\mathrm{V}$.
Además: $x(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ y $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$.
Si $k_1 = k_2 = k$, entonces $k_3 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k}{2}$ y

$$
\begin{aligned}
P(s) &= Jbs^3 + (Bb + 2kJ)\,s^2 + \left(\frac{3}{2}kr^2 b + 2kB\right) s + 2k^2 r^2 \\
&= Jb\left(s^3 + \frac{Bb + 2kJ}{Jb}s^2 + \frac{\frac{3}{2}kr^2 b + 2kB}{Jb}s + \frac{2k^2 r^2}{Jb}\right) \\
&= Jb\,(s+q)\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right) = Jb\,(s+q)\left[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2\right]
\end{aligned}
$$

donde $q \approx 3.0091\,\mathrm{s}^{-1}$ $\quad \zeta \approx 0{,}35768$ $\quad \omega_n \approx 1.4131\,\mathrm{s}^{-1}$ y

$$\alpha = \zeta\omega_n \approx 0.505\,43\,\mathrm{s}^{-1} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1.3196\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\Phi(s) = \underbrace{\frac{\left(s + \frac{2k}{b}\right)\left(s + \frac{B}{J}\right)}{(s+q)\left[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2\right]}\varphi(0)}_{\Phi_n(s)} + \underbrace{\frac{\frac{kra}{Jb}}{(s+q)\left[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2\right]}\frac{V_0}{s}}_{\Phi_f(s)}$$

Parte c

Respuesta a un escalón de 2 V partiendo del reposo desde $x = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\Phi(s) = \frac{s\left(s + \frac{2k}{b}\right)\left(s + \frac{B}{J}\right)\varphi(0) + \frac{kra}{Jb}V_0}{s\left(s+q\right)\left[\left(s+\alpha\right)^2 + \omega_d^2\right]} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+q} + \frac{c_3 s + c_4}{\left(s+\alpha\right)^2 + \omega_d^2}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\frac{kra}{Jb}V_0}{q\left(\alpha^2 + \omega_d^2\right)} \\
c_2 &= \frac{q\left(\frac{2k}{b} - q\right)\left(\frac{B}{J} - q\right)\varphi(0) - \frac{kra}{Jb}V_0}{q\left[\left(\alpha - q\right)^2 + \omega_d^2\right]} \\
c_3 &= \varphi(0) - c_1 - c_2 \\
c_4 &= \frac{\frac{2k}{b}\frac{B}{J}\varphi(0) - \left(2q\alpha + \alpha^2 + \omega_d^2\right)c_1 - \left(\alpha^2 + \omega_d^2\right)c_2}{q}
\end{aligned}$$

Parte c

Respuesta a un escalón de 2 V partiendo del reposo desde $x = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+q} + \frac{c_3 s + c_4}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \\
&= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+q} + c_3 \frac{s}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{c_4}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \\
&= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+q} + c_3 \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{c_4 - \alpha c_3}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \\
&= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+q} + c_3 \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} + \left(\frac{c_4 - \alpha c_3}{\omega_d}\right) \frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2}
\end{aligned}
$$

$$
\varphi(t) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-qt} + c_3 \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) + \frac{c_4 - \alpha c_3}{\omega_d} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)
$$