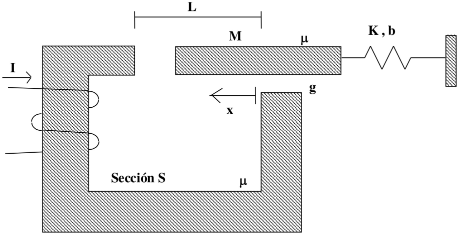
SyC - Hoja 4 - Ej. 1

1) Se considera el sistema posicionador de la **figura**. Consiste en una barra de material ferromagnético (hierro) que se puede desplazar horizontalmente sometida a la acción de una fuerza magnética, un resorte de constante **K** y un amortiguador de constante **b**. La corriente **I** circula por las **N** espiras de la bobina arrollada en torno al núcleo.



Hipótesis:

- Se considera que para el hierro $\mu = \infty$ y que no hay flujo de fugas.
- Para el aire, la curva B(H) es lineal
- El resorte tiene longitud natural **d**. ($\mathbf{x} = \mathbf{d}$ para $\mathbf{I} = 0$).
- La sección del hierro es constante de valor **S** y el gap entre el hierro y la barra móvil vale **g**.

a) Encontrar las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema.

b) Linealizar el sistema en torno del punto de equilibrio $\mathbf{x_0}, \mathbf{I_0}$.

Modelado

Segunda ley de Newton aplicada la barra móvil:

$$M\ddot{x} = -b\dot{x} - k\,(x - d) + F$$

donde F es la fuerza magnética.

Si la corriente I se mantiene *impuesta* mediante un agente externo, se puede probar que $F = (\nabla U)_I$, siendo U la energía almacenada en el campo magnético.

En este caso,

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_I$$

con

$$U = \int u \mathrm{d}V \quad \text{donde} \quad u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}.$$

Cálculo de la energía magnética

$$u = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \qquad \phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = BS$$

$$u = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\frac{\vec{B}}{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{\mu S^2}$$

$$\mathrm{d}U = u\mathrm{d}V = uS\mathrm{d}l = \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{\mu S^2}S\mathrm{d}l = \frac{1}{2}\phi^2\frac{\mathrm{d}l}{\mu S} = \frac{1}{2}\phi^2\mathrm{d}\mathcal{R}$$

Integrando a lo largo del circuito magnético:

$$U = \frac{1}{2}\phi^2\mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} = \underbrace{\mathcal{R}_{\text{hierro}}}_{0} + \underbrace{\mathcal{R}_{\text{gap}}}_{\frac{g}{\mu_0 S}} + \underbrace{\mathcal{R}_{\text{variable}}}_{\frac{L-x}{\mu_0 S}}$$

De la ley de Ampère: $NI = \mathcal{R}\phi$

Entonces:

$$U = \frac{N^2 I^2}{2\mathcal{R}}$$

donde

$$\mathcal{R} = \frac{g + L - x}{\mu_0 S}$$

Ecuación del movimiento y rep. en variables de estado

Ecuación del movimiento:

$$M\ddot{x} = -b\dot{x} - k\left(x-d\right) + F \quad \text{donde} \quad F = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_I = \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{2\left(g+L-x\right)^2}$$

Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{b}{M}\dot{x} - \frac{k}{M}\left(x-d\right) + \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{2M(g+L-x)^2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Entrada: $\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$
Estado: $\begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
Salida: $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$

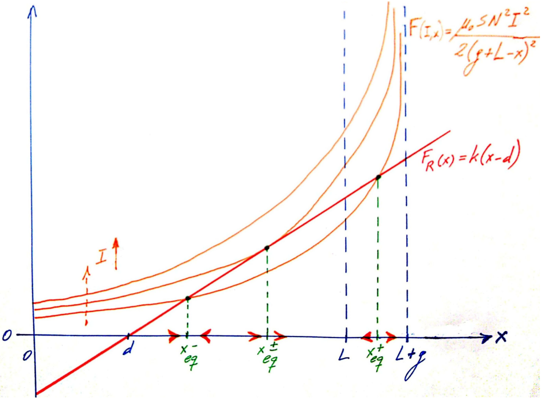
Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio surgen de las soluciones de:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, [I]\right) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{b}{M}\dot{x} - \frac{k}{M}(x-d) + \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{2M(g+L-x)^2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\mu_0 S N^2 I^2}{2\,(g+L-x)^2}}_{F(x,I)} = \underbrace{k\,(x-d)}_{F_R(x)}$$



Dependiendo de I puede haber 0, 1 ó 2 puntos de equilibrio.

Los puntos de eq. (x_0, I_0) verifican: $F(x_0, I_0) = F_R(x_0)$

Además, a partir del estudio gráfico:

Dos puntos de eq.: x_0^- y x_0^+
Verifican:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0^-, I_0\right) < k$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0^+, I_0\right) > k$$

Un punto de eq.: $x_0^\pm$
Verifica:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0^\pm, I_0\right) = k$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, I) = \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{(g + L - x)^3}$$

En cualquier caso, para que un punto de equilibrio x_0 tenga sentido en el contexto del ejercicio, debe cumplirse:

$$x_0 < L$$

Linealización

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{b}{M}\dot{x} - \frac{k}{M}(x-d) + \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{2M(g+L-x)^2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Sean:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \tilde{I} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} + \frac{\mu_0 S N^2 I_0^2}{M(g+L-x_0)^3} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0 S N^2 I_0}{M(g+L-x_0)^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{I} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} \end{cases}}$$

Función de transferencia

Aplicando transformada de Laplace (con cond. iniciales nulas):

$$s^2\tilde{x}(s) = \left(-\frac{k}{M} + \frac{\mu_0 S N^2 I_0^2}{M\left(g+L-x_0\right)^3}\right)\tilde{x}(s) - \frac{b}{M}s\tilde{x}(s) + \frac{\mu_0 S N^2 I_0}{M\left(g+L-x_0\right)^2}\tilde{I}(s)$$

Entonces:

$$\tilde{x}(s) = \frac{\frac{\mu_0 S N^2 I_0}{M(g+L-x_0)^2}}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{1}{M}\left(k - \underbrace{\frac{\mu_0 S N^2 I_0^2}{\left(g+L-x_0\right)^3}}_{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, I_0)}\right)}\tilde{I}(s)$$

¿Para cuál punto de equilibrio pretendemos usar la linealización?