

- Repaso: correlación cruzada y espectro cruzado de procesos conjuntamente WSS

- Filtro de Wiener: aplicación a degradaciones lineales contaminadas con ruido.

Correlación cruzada, espectro cruzado.

• $x(t)$, $y(t)$ procesos reales, conjuntamente WSS (J-WSS),

esto es:

= Ambos son WSS

= $E[x(t_1)y(t_2)]$ depende de t_1 y t_2 únicamente a través de su diferencia $t_1 - t_2$

• Definimos la correlación cruzada de $x(t)$ et $y(t)$ J-WSS con la convención siguiente:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t+\tau)y(t)]$$

OBS: A diferencia de la autocorrelación, en donde poco importaba (siempre considerando procesos reales) si sumábamos o restábamos τ en la definición ya que

$$R_x(-\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} E[x(t+\tau)x(t+\tau-\tau)]$$

inv a transl.

$$= E[x(t+\tau)x(t)] = R_x(\tau),$$

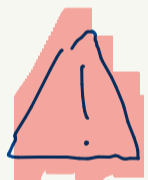
en la correlación cruzada hay que ser consistente con la definición.

En efecto,

$$\begin{aligned} R_{xy}(-\tau) &= \mathbb{E} [x(t-\tau) y(t)] \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \mathbb{E} [x(t+\tau-\tau) y(t+\tau)] \\ &\stackrel{\text{inv. a}}{\text{traslaciones}} = \mathbb{E} [x(t) y(t+\tau)] \\ &= R_{yx}(\tau) \end{aligned}$$

Definimos el espectro cruzado como

$$S_{xy}(f) = \int_{\mathbb{R}} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$



OBS:

esto no es una densidad espectral de potencia. Por ejemplo, como en general no tenemos que $R_{xy}(\tau)$ es par, $S_{xy}(f)$ será una función compleja.

$$S_{xy}(-f) = \int R_{xy}(\tau) e^{+i2\pi f\tau} d\tau = S_{xy}^*(f)$$

$$\begin{aligned} S_{xy}(-f) &= \int R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f(-\tau)} d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \text{c.v.} \\ \lambda = -\tau \end{array} \right\} \\ &= \int R_{xy}(-\lambda) e^{-i2\pi f\lambda} d\lambda = \int R_{yx}(\lambda) e^{-i2\pi f\lambda} d\lambda = S_{yx}(f) \end{aligned}$$

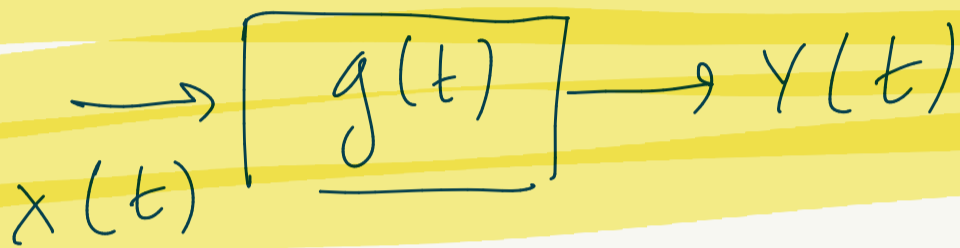
Resumiendo, para
procesos J-WSS

reales :

$$\cdot R_{XY}(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau)Y(t)]$$

$$\cdot R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$$

$$\cdot S_{XY}(-f) = S_{XY}^*(f) = S_{YX}(f)$$



• X WSS real

• $g(t)$ resp. al impulso de un LTI estable

Estudiamos la correlación entre la
entrada y la salida del filtro:

$$Y(t) = g * X(t) = \int_{\mathbb{R}} g(u) X(t-u) du$$

i) $Y(t)$ también es WSS:

$$\cdot \mathbb{E}[Y(t)] = \int_{\mathbb{R}} g(u) \mathbb{E}[X(t-u)] du = m_X \int_{\mathbb{R}} g(u) du$$

$$\cdot \mathbb{E}[Y(t)Y(t+\tau)] =$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(u) \int_{\mathbb{R}} g(v) \underbrace{\mathbb{E}[X(t-u)X(t+\tau-v)]}_{R_X(t+\tau-v-t+u)} du dv \rightarrow$$

(w/ g))

$$\mathbb{E}[Y(t)Y(t+\tau)] = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g(u)g(v) R_X(\tau - v + u) du dv$$

(sólo depende de τ , no de t)

$$\bullet R_{XY}(t+\tau, t) = \mathbb{E}[X(t+\tau)Y(t)]$$

$$= \mathbb{E}\left[X(t+\tau) \int_{\mathbb{R}} g(u) X(t-u) du\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(u) \mathbb{E}[X(t+\tau)X(t-u)] du$$

$$\stackrel{\substack{\tau \\ X \text{ WSS}}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(u) R_X(t+\tau - t + u) du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{c.v.} \\ v = -u \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}} g(-v) R_X(\tau - v) dv$$

$$\Leftrightarrow R_{XY}(t+\tau, t) = \bar{g} * R_X(\tau)$$

$\therefore R_{XY}$ es inv. a translaciones.

luego: $\left. \begin{array}{l} - X(t), Y(t) \text{ WSS} \\ - R_{XY}(t+\tau, t) \text{ indep de } t \end{array} \right\} \begin{array}{l} X(t), Y(t) \\ \text{J-WSS} \end{array}$

Filtro de Wiener

Como vimos en clase, la transferencia del filtro de Wiener para la estimación de un proceso (no observado) $v(t)$ a partir de un proceso (observado) $u(t)$ es

$$\hat{h}(f) = \frac{S_{vu}(f)}{S_u(f)}$$

(Atención: respetar las convenciones para $R_{vu}(\tau) = \mathbb{E}[v(t+\tau)u(t)]$)
 $S_{vu}(f) = \mathcal{F}\{R_{vu}\}(f)$

Aplicación: Proceso degradado por filtro LTI y contaminado con ruido:

$$u(t) = g * v(t) + n(t),$$

- donde:
- $v(t)$ WSS
 - $n(t)$ WSS, de media nula
 - $v(t)$ y $n(t)$ independientes

Calculamos el filtro de Wiener para esta degradación:

$$\begin{aligned} R_{vU}(\tau) &= \mathbb{E}[v(t+\tau)U(t)] \\ &= \mathbb{E}[v(t+\tau)(g * v(t) + N(t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[v(t+\tau)(g * v(t))] \\ &\quad + \mathbb{E}[v(t+\tau)N(t)] \end{aligned}$$

linealidad de \mathbb{E}

Para el primer término, aplicamos la relación $R_{xy}(\tau) = \bar{g} * R_x(\tau)$ para

$$y(t) = g * x(t), \text{ identificando } x(t) \text{ con } v(t) \text{ y } y(t) \text{ con } U(t).$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[v(t+\tau)(g * v(t))] = \bar{g} * R_v(\tau)$$

Para el segundo término,

$$\mathbb{E}[v(t+\tau)N(t)] \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{indep}}}{=} \mathbb{E}[v(t+\tau)] \underbrace{\mathbb{E}[N(t)]}_{=0} = 0$$

Thenemos entrees $R_{VV}(\tau) = \bar{g} * R_V(\tau)$.

$$\Rightarrow S_{VV}(f) = \hat{\bar{g}}(f) \cdot S_V(f)$$

Con

$$\begin{aligned} \hat{\bar{g}}(f) &= \int \bar{g}(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \int g(-t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \int g(u) e^{+i2\pi fu} du = \hat{g}^*(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet R_V(\tau) &= \mathbb{E}[V(t)V(t+\tau)] \\ &= \mathbb{E}[(g * V(t) + N(t))(g * V(t+\tau) + N(t+\tau))] \\ &= \mathbb{E}[(g * V(t))(g * V(t+\tau))] \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}[N(t)]}_{=0} \mathbb{E}[g * V(t+\tau)] \\ &\quad + \mathbb{E}[g * V(t)] \underbrace{\mathbb{E}[N(t+\tau)]}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}[N(t)N(t+\tau)]}_{R_N(\tau)} \end{aligned}$$

Then we have:

$$R_v(\tau) = \mathbb{E}[(g * v(t+\tau))(g * v(t))] + R_N(\tau)$$

$$\mathbb{E}[(g * v(t+\tau))(g * v(t))]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int g(u) v(t+\tau-u) du \int g(v) v(t-v) dv\right]$$

$$= \int \int g(u) g(v) \underbrace{\mathbb{E}[v(t+\tau-u - t + v)]}_{R_v(\tau-u+v)} du dv$$

$$= \int g(v) \left\{ \int g(u) R_v(\tau+v-u) du \right\} dv$$

$$= \int g(-z) (g * R_v(\tau-z)) dz$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \int g(-z) (g * R_v(\tau-z)) dz$$

$z = -v$

$$\Rightarrow \bar{g} * g * R_v(\tau)$$

$$\Rightarrow S_v(f) = \hat{g}^*(f) \cdot \hat{g}(f) S_v(f) + S_N(f)$$

$$= |\hat{g}(f)|^2 S_v(f) + S_N(f)$$

Finalmente, obtenemos:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{g}^*(f) S_v(f)}{|\hat{g}(f)|^2 S_v(f) + S_N(f)}$$