- Repaso: correlación cruzada y espectro cruzado de procesos conjuntamente WSS

- Filtro de Wiener: aplicación a degradaciones lineales contaminadas con ruido.

Correlación cruzada, espectro cruzado.

- $X(t)$, $Y(t)$ procesos reales, conjuntamente WSS (J-WSS),

esto es:
- Ambos son WSS
- $\mathbb{E}[X(t_1)Y(t_2)]$ depende de t_1 y t_2 únicamente a través de su diferencia $t_1 - t_2$

- Definimos la correlación cruzada de $X(t)$ et $Y(t)$ J-WSS con la convención siguiente:

$$\boxed{R_{XY}(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau)Y(t)]}$$

OBS: A diferencia de la autocorrelación, en donde poco importaba (siempre considerando procesos reales) si sumábamos o restábamos τ en la definición ya que

$$R_X(-\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t-\tau)]$$

$$\underset{\text{inv a transl.}}{=} \mathbb{E}[X(t+\tau)X(t+\tau-\tau)]$$

$$= \mathbb{E}[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau),$$

en la correlación cruzada hay que ser consistente con la definición.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(-\tau) &= \mathbb{E}\left[X(t-\tau)\, Y(t) \right] \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inv. a traslaciones}}}{=} \mathbb{E}\left[X(t+\tau-\tau)\, Y(t+\tau) \right] \\
&= \mathbb{E}\left[X(t)\, Y(t+\tau) \right] \\
&= R_{YX}(\tau)
\end{aligned}
$$

. Definimos el espectro cruzado como

$$S_{XY}(f) = \int_{\mathbb{R}} R_{XY}(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

OBS: esto no es una densidad espectral de potencia. Por ejemplo, como en general no tenemos que $R_{XY}(\tau)$ es par, $S_{XY}(f)$ será una función compleja.

. $S_{XY}(-f) = \int R_{XY}(\tau)\, e^{+i2\pi f\tau}\, d\tau = S^{*}_{XY}(f)$

. $S_{XY}(-f) = \int R_{XY}(\tau)\, e^{-i2\pi f(-\tau)}\, d\tau = \left\{ \begin{smallmatrix} \text{C.V.} \\ \lambda = -\tau \end{smallmatrix} \right\}$

$= \int R_{XY}(-\lambda)\, e^{-i2\pi f\lambda}\, d = \int R_{YX}(\lambda)\, e^{-i2\pi f\lambda}\, d\lambda = S_{YX}(f)$

Resumiendo, para procesos J-WSS reales:

- $R_{XY}(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau)Y(t)]$
- $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$
- $S_{XY}(-f) = S^*_{XY}(f) = S_{YX}(f)$

$$X(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow Y(t)$$

- X WSS real
- $g(t)$ resp. al impulso de un LTI estable

Estudiemos la correlación entre la entrada y la salida del filtro:

$$Y(t) = g * X(t) = \int_{\mathbb{R}} g(u)\, X(t-u)\, du$$

i) $Y(t)$ también es WSS:

- $\mathbb{E}[Y(t)] = \int_{\mathbb{R}} g(u)\, \mathbb{E}[X(t-u)]\, du = m_X \int g(u)\, du$
- $\mathbb{E}[Y(t)Y(t+\tau)] =$

$$\int_{\mathbb{R}} g(u) \int_{\mathbb{R}} g(v)\, \underbrace{\mathbb{E}[X(t-u)X(t+\tau-v)]}_{R_X(\cancel{t}+\tau-v-\cancel{t}+u)}\, du\, dv$$

$(X \text{ wss})$

(sigue)

$$\mathbb{E}[Y(t)Y(t+\tau)] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(u)\, g(v)\, R_X(\tau - v + u)\, du\, dv$$

(sólo depende de τ, no de t)

- $R_{XY}(t+\tau, t) = \mathbb{E}[X(t+\tau)Y(t)]$

$$= \mathbb{E}\left[X(t+\tau)\int_{\mathbb{R}} g(u)\, X(t-u)\, du\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(u)\, \mathbb{E}[X(t+\tau)X(t-u)]\, du$$

$$\underset{X \text{ WSS}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(u)\, R_X(\cancel{t}+\tau-\cancel{t}+u)\, du$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{c.v.} \\ v=-u \end{matrix}\right\} = \int_{\mathbb{R}} g(-v)\, R_X(\tau - v)\, dv$$

$$\Longleftrightarrow \quad R_{XY}(t+\tau, t) = \bar{g} * R_X(\tau)$$

$\therefore$ R_{XY} es inv. a translaciones.

Luego: $\left.\begin{matrix} - X(t), Y(t) \text{ WSS} \\ - R_{XY}(t+\tau, t) \text{ indep de } t \end{matrix}\right\}$ $X(t), Y(t)$ J-WSS

Filtro de Wiener

Como vimos en clase, la transferencia del filtro de Wiener para la estimación de un proceso (no observado) $V(t)$ a partir de un proceso (observado) $U(t)$ es

$$\hat{h}(f) = \frac{S_{VU}(f)}{S_U(f)}$$

(Atención: respetar las convenciones para $R_{VU}(\tau) = \mathbb{E}[V(t+\tau)U(t)]$
$S_{VU}(f) = \mathcal{F}\{R_{VU}\}(f)$)

Aplicación: Proceso degradado por filtro LTI y contaminado con ruido:

$$U(t) = g * V(t) + N(t),$$

donde:
- $V(t)$ WSS
- $N(t)$ WSS, de media nula
- $V(t)$ y $N(t)$ independientes

Calculemos el filtro de Wiener para esta degradación:

- $$R_{VU}(\tau) = \mathbb{E}[V(t+\tau)U(t)]$$

$$= \mathbb{E}[V(t+\tau)(g * V(t) + N(t))]$$

$$\underset{\text{linealidad de } \mathbb{E}}{=} \mathbb{E}[V(t+\tau)(g * V(t))] + \mathbb{E}[V(t+\tau)N(t)]$$

Para el primer término, aplicamos la relación $R_{XY}(\tau) = \bar{g} * R_X(\tau)$ para $Y(t) = g * X(t)$, identificando $X(t)$ con $V(t)$ y $Y(t)$ con $U(t)$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[V(t+\tau)(g * V(t))] = \bar{g} * R_V(\tau)$$

Para el segundo término,

$$\mathbb{E}[V(t+\tau)N(t)] \underset{\text{indep}}{=} \mathbb{E}[V(t+\tau)]\underbrace{\mathbb{E}[N(t)]}_{=0}$$

$$= 0$$

Tenemos entonces $R_{VU}(\tau) = \bar{g} * R_V(\tau)$.

$$\Rightarrow \boxed{S_{VU}(f) = \hat{\bar{g}}(f) \cdot S_V(f)}$$

Con $\hat{\bar{g}}(f) = \int \bar{g}(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$

$$= \int g(-t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$$

$$= \int g(u)\, e^{+i2\pi f u}\, du = \hat{g}^*(f)$$

• $R_U(\tau) = \mathbb{E}[U(t)\, U(t+\tau)]$

$$= \mathbb{E}\left[\left(g * V(t) + N(t)\right)\left(g * V(t+\tau) + N(t+\tau)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(g * V(t)\right)\left(g * V(t+\tau)\right)\right]$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E}[N(t)]}_{=0}\, \mathbb{E}[g * V(t+\tau)]$$

$$+ \mathbb{E}[g * V(t)]\, \underbrace{\mathbb{E}[N(t+\tau)]}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E}[N(t)\, N(t+\tau)]}_{R_N(\tau)}$$

Tenemos entonces:

$$R_U(\tau) = \mathbb{E}\left[(g * V(t+\tau))(g * V(t))\right] + R_N(\tau)$$

$$\mathbb{E}\left[(g*V(t+\tau))(g*V(t))\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int g(u)\, V(t+\tau-u)\, du \int g(v)\, V(t-v)\, dv\right]$$

$$= \iint g(u)\, g(v)\, \underbrace{\mathbb{E}\left[V(t+\tau-u-t+v)\right]}_{R_V(\tau-u+v)}\, du\, dv$$

$$= \int g(v) \Big\{ \underbrace{\int g(u)\, R_V(\tau+v-u)\, du}_{g * R_V(\tau+v)} \Big\}\, dv$$

$$\underset{z=-v}{=} \int g(-z)\, (g * R_V(\tau-z))\, dz$$

$$= \bar{g} * g * R_V(\tau)$$

$$\Longrightarrow S_U(f) = \hat{g}^*(f) \cdot \hat{g}(f)\, S_V(f) + S_N(f)$$

$$= |\hat{g}(f)|^2 S_V(f) + S_N(f)$$

Finalmente, obtenemos:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{g}^*(f)\, S_v(f)}{|\hat{g}(f)|^2 S_v(f) + S_N(f)}$$