CURSO DE COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL 2021

Obligatorio 2

1. Se define el lenguaje
   $EXACTLY-k-SAT=\{\langle\varphi,k\rangle \mid \varphi \text{ fórmula CNF con exactamente } k \text{ asignaciones que la satisfacen}\}$
   Probar que:
   a) *EXACTLY-k-SAT* es coNP hard
   b) *EXACTLY-k-SAT* $\in$ PSPACE

2. Sea el siguiente lenguaje:
   $SPACE\_TM=\{\langle M,w,1^n\rangle \mid \text{la MTD M acepta la entrada w en espacio n}\}$
   Probar que SPACE_TM es PSPACE-completo.

3. Definimos el producto de dos matrices booleanas *A* y *B* $n\ x\ n$ como otra matriz booleana *C* $n\ x\ n$ tal que $C_{ij}=\vee_{k=1}^{n} A_{ik}\wedge B_{kj}$. En lo que sigue todas la matrices son booleanas $n\ x\ n$.
   a) Mostrar que la multiplicación de matrices booleanas puede hacerse en espacio logarítmico.
   b) Justificar que A^p puede ser calculada en espacio $O(\log n \log p)$. Tomar $p=2^k$, con *k* un entero positivo.
   c) Mostrar que si *A* es la matriz de adyacencia de un grafo dirigido, entonces $\left(A^k\right)_{ij}=1$ si y solo si hay un camino dirigido de largo ***k*** desde el vértice i al vértice j.
   d) Usar los resultados anteriores para probar que $NL\subseteq SPACE(\log^2 n)$, como una demostración alternativa a la aplicación directa del teorema de Savitch.

4. En este problema se consideran los Autómatas Finitos Deterministas (AFD) definidos por una tupla $AFD=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ siendo Q el conjunto de estados del autómata, Σ el alfabeto, δ la función de transición, q_0 el estado inicial y F el conjunto de estados de aceptación.
   Se define el lenguaje
   $VACIO_{AFD}=\{\langle A\rangle \mid A \text{ es un AFD y } L(A)=\phi \ (A \text{ no acepta ninguna tira})\}$
   Probar que $VACIO_{AFD}$ es NL-completo.

5. La clase **DP** se define como el conjunto de lenguajes L para los cuales hay dos lenguajes $L_1 \in NP$ y $L_2 \in coNP$ tales que $L = L_1 \bigcap L_2$.

   Probar que:

   (a) EXACT INDSET $\in \Pi_2^p$.

   (b) EXACT INDSET $\in$ DP .

   (c) Todo lenguaje en DP es reducible en tiempo polinomial a EXACT INDSET.

   $EXACT\ INDSET = \{\langle G,k\rangle \mid \text{el mayor conjunto independiente de nodos de } G \text{ tiene tamaño exacto } k\}$

6. (Reducción de error para **RP**) Sea $L \subseteq \{0,1\}^*$ tal que existe una máquina M probabilista de Turing (PTM) polinomial en el tiempo que satisface para todo $x \in \{0,1\}^*$:

   (1) Si $x \in L$, entonces $\Pr[M(x)=1] \geq n^{-c}$ y

   (2) Si $x \notin L$, entonces $\Pr[M(x)=1] = 0$.

   Probar que para todo d > 0 existe una PTM polinomial en el tiempo M' tal que para todo $x \in \{0,1\}^*$ se cumple

   (1) Si $x \in L$, entonces $\Pr[M'(x)=1] \geq 1-2^{-n^d}$ y

   (2) Si $x \notin L$, entonces $\Pr[M'(x)=1] = 0$

7. (a) Probar que un lenguaje L está en **ZPP** si y sólo si existe una máquina M PTM polinomial en el tiempo con salida en {0, 1, ?} tal que para todo $x \in \{0,1\}^*$, con probabilidad 1, $M(x) \in \{L(x), ?\}$ y además $\Pr[M(x) = ?] \leq 1/2$.

   (Probar que esta definición es equivalente a la dada en la Definición 7.7 del libro de Arora y Barak).

   b) Probar que **ZPP** = **RP** ∩ **coRP**.

8. Probar que la idea de usar caminos aleatorios en la demostración del Teorema 7.19 del libro de Arora y Barak para conectividad en grafos no funciona para grafos dirigidos. Para esto se pide encontrar un grafo dirigido de n vértices fuertemente conexo (con camino dirigido entre todo par de vértices), con un vértice inicial s y un vértice terminal t, tal que <u>el valor esperado</u> del número de pasos para llegar desde s a t sea $\Omega(2^n)$.