SyC - Hoja 3 - Ej. 1,a

1) Se considera un pequeño sistema físico constituido por dos tanques de agua, de secciones constantes $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, superiormente abiertos a la atmósfera. Los tanques se conectan como se muestra en la figura. Las válvulas ofrecen resistencias hidráulicas constantes $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$.

Denominamos:

$\mathbf{u}$: Gasto de entrada.

$\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$: Presiones instantáneas en las bases de los tanques, referidas a la presión atmosférica.

$\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}$: Gastos instantáneos en las cañerías.

Se pide:

a) Obtener un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias y a coeficientes constantes) que describa la evolución del sistema en función de $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$ y las condiciones iniciales $\mathbf{p_1(0)}$ y $\mathbf{p_2(0)}$.

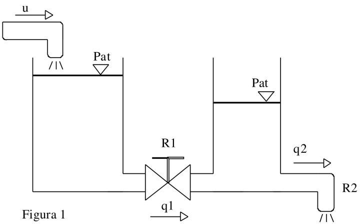


Figura 1

SyC - Hoja 3 - Ej. 1,a

Modelado

Balance volumétrico en cada tanque:

$$A_1 \dot{h}_1 = u - q_1$$
$$A_2 \dot{h}_2 = q_1 - q_2$$

Presiones hidrostaticas manométricas en la base de cada tanque:

$$p_1 = \rho g h_1$$
$$p_2 = \rho g h_2$$

Flujo a través de cada resistencia hidráulica:

$$q_1 = \frac{(p_{\mathrm{atm}} + p_1) - (p_{\mathrm{atm}} + p_2)}{R_1} = \frac{p_1 - p_2}{R_1}$$
$$q_2 = \frac{(p_{\mathrm{atm}} + p_2) - p_{\mathrm{atm}}}{R_2} = \frac{p_2}{R_2}$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 1,a

Sistema de ecuaciones diferenciales que describe la evolución del sistema

Derivando las expresiones para p_1 y p_2 y sustituyendo $\dot{h}_1$ y $\dot{h}_2$:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \rho g \dot{h}_1 = \rho g \frac{u - q_1}{A_1} = \frac{u - q_1}{C_1} = \frac{u - \frac{p_1 - p_2}{R_1}}{C_1} \\ \dot{p}_2 = \rho g \dot{h}_2 = \rho g \frac{q_1 - q_2}{A_2} = \frac{q_1 - q_2}{C_2} = \frac{\frac{p_1 - p_2}{R_1} - \frac{p_2}{R_2}}{C_2} \end{cases}$$

donde $C_i = \frac{A_i}{\rho g}$, para $i = 1, 2$.

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} p_1 + \frac{1}{R_1 C_1} p_2 + \frac{1}{C_1} u, & p_1(0) = p_{1,0} \\ \dot{p}_2 = \frac{1}{R_1 C_2} p_1 - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) p_2, & p_2(0) = p_{2,0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \frac{p_1 - p_2}{R_1} \\ q_2 = \frac{p_2}{R_2} \end{cases}$$

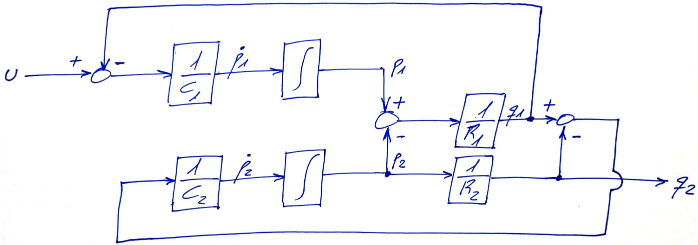
SyC - Hoja 3 - Ej. 1,b

Condiciones iniciales

b) i) Dibuje un diagrama de bloques para el sistema de la figura, cuando las condiciones iniciales son nulas, considerando como entrada $\mathbf{u(t)}$ y como salida $\mathbf{y(t) = q_2}$.

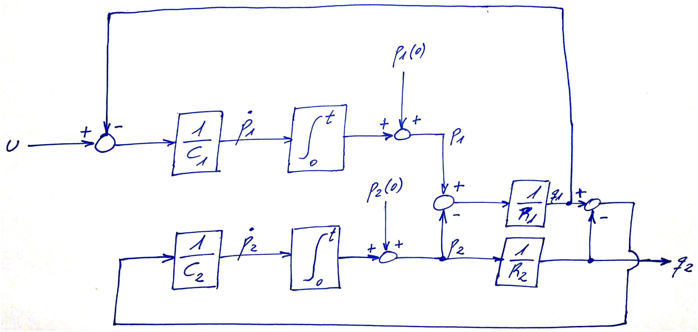
ii) Ídem cuando las condiciones iniciales $\mathbf{p_1(0)}$ y $\mathbf{p_2(0)}$ no son nulas. Observe que se puede considerar un vector de entradas $\mathbf{e = [u\ p_1(o)\ p_2(o)]}$ donde $\mathbf{p_1(o)}$ y $\mathbf{p_2(o)}$ son constantes.

i)



u
+
-
$\frac{1}{C_1}$
$\dot{p}_1$
$\int$
p_1
+
-
$\frac{1}{R_1}$
q_1
+
-
$\frac{1}{C_2}$
$\dot{p}_2$
$\int$
p_2
$\frac{1}{R_2}$
q_2

ii)



u
+
-
$\frac{1}{C_1}$
$\dot{p}_1$
$\int_0^t$
$p_1(0)$
+
+
p_1
+
-
$\frac{1}{R_1}$
q_1
+
-
$p_2(0)$
$\frac{1}{C_2}$
$\dot{p}_2$
$\int_0^t$
+
+
p_2
$\frac{1}{R_2}$
q_2

SyC - Hoja 3 - Ej. 1,c,i

Representación en variables de estado

c) i) Dados $\mathbf{x(t) = [p_1\ p_2]^t}$ vector de estados, $\mathbf{y(t) = q_2}$ salida, representar el sistema de la forma:

$$\dot{x} = A.x + B.u$$
$$y = C.x + D.u$$

hallando las matrices **A**,**B**,**C**,**D**.

ii) El diagrama de bloques asociado a esta forma es el de la parte b.i) (note que difiere ligeramente del de la parte b.ii). ¿Podría explicar la diferencia? ¿Existe alguna similitud al hecho de resolver problemas de circuitos con transformadas de Laplace agregando fuentes en lugar de condiciones iniciales?

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} p_1 + \frac{1}{R_1 C_1} p_2 + \frac{1}{C_1} u \\ \dot{p}_2 = \frac{1}{R_1 C_2} p_1 - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2 = \frac{p_2}{R_2} \end{cases}$$

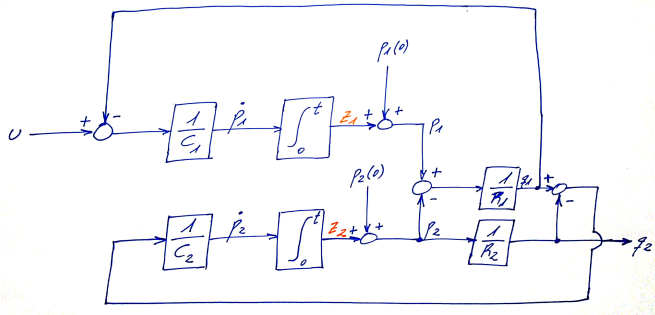
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 1,b,ii

Condiciones iniciales como entradas

Sean $z_1 = p_1 - p_1(0)$ y $z_2 = p_2 - p_2(0)$:



$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \dot{z}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}\left(z_1 + p_1(0)\right) + \frac{1}{R_1 C_1}\left(z_2 + p_2(0)\right) + \frac{1}{C_1} u \\ \dot{p}_2 = \dot{z}_2 = \frac{1}{R_1 C_2}\left(z_1 + p_1(0)\right) - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)\left(z_2 + p_2(0)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2 = \frac{(z_2 + p_2(0))}{R_2} \end{cases}$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 1,b,ii

Condiciones iniciales como entradas

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \hat{B} \begin{bmatrix} u \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = q_2 = \hat{C} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \hat{D} \begin{bmatrix} u \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} \end{cases}$$

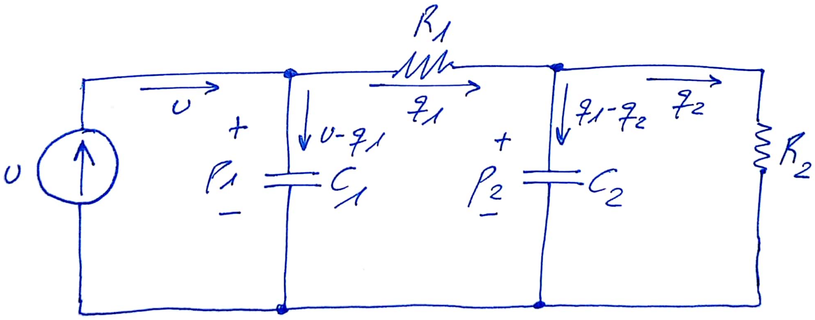
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_1 C_2} & -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \qquad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

Esta es una representación en variables de estado del sistema de entrada $\begin{bmatrix} u & p_1(0) & p_2(0) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, y salida q_2.

SyC - Hoja 3 - Ej. 1,c,ii

Analogía eléctrica



SyC - Hoja 3 - Ej. 1,c,ii

Analogía eléctrica

$$\begin{cases} C_1 \dot{p}_1 = u - q_1 \\ C_2 \dot{p}_2 = q_1 - q_2 \\ q_1 = \frac{p_1 - p_2}{R_1} \\ q_2 = \frac{p_2}{R_2} \end{cases}$$

Aplicando transformada de Laplace ...

$$\begin{cases} C_1 \left(sP_1(s) - p_1(0) \right) = U(s) - Q_1(s) \\ C_2 \left(sP_2(s) - p_2(0) \right) = Q_1(s) - Q_2(s) \\ Q_1(s) = \frac{P_1(s) - P_2(s)}{R_1} \\ Q_2(s) = \frac{P_2(s)}{R_2} \end{cases}$$

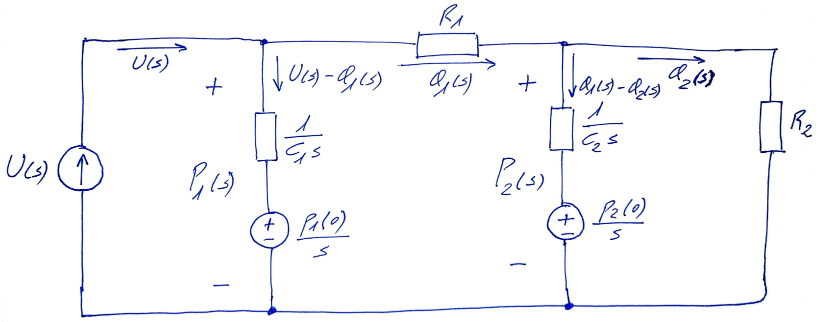
Explicitando impedancias ...

$$\begin{cases} \frac{\left(P_1(s) - \frac{p_1(0)}{s} \right)}{\frac{1}{C_1 s}} = U(s) - Q_1(s) \\ \frac{\left(P_2(s) - \frac{p_2(0)}{s} \right)}{\frac{1}{C_2 s}} = Q_1(s) - Q_2(s) \\ Q_1(s) = \frac{P_1(s) - P_2(s)}{R_1} \\ Q_2(s) = \frac{P_2(s)}{R_2} \end{cases}$$

¡Como en teoría de circuitos!

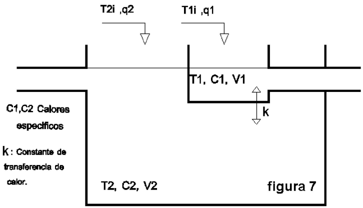
SyC - Hoja 3 - Ej. 1,c,ii

Analogía eléctrica (con condiciones iniciales)



SyC - Hoja 3 - Ej. 2

2) El sistema de la figura se utiliza para elevar "a baño maría" la temperatura de un líquido. El calentamiento se produce haciendo circular el líquido a calentar (1) dentro de un recipiente sumergido en un baño caliente (2). $\mathbf{q_1}$ es el caudal a ser calentado y $\mathbf{T1_i}$ es su temperatura inicial. $\mathbf{q_2}$ es el caudal de líquido calefactor que entra al recipiente exterior y $\mathbf{T2_i}$ su temperatura de entrada. Los niveles de ambos recipientes se mantienen constantes. Hallar una representación en espacio de estados del sistema térmico de la figura.



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V_1 c_1 T_1\right) = V_1 c_1 \dot{T}_1 = q_1 c_1 T_{1i} - q_1 c_1 T_1 + k\left(T_2 - T_1\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V_2 c_2 T_2\right) = V_2 c_2 \dot{T}_2 = q_2 c_2 T_{2i} - q_2 c_2 T_2 - k\left(T_2 - T_1\right)$$

SyC - Hoja 3 - Ej. 2

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = -\left(\frac{q_1}{V_1} + \frac{k}{V_1 c_1}\right) T_1 + \frac{k}{V_1 c_1} T_2 + \frac{q_1}{V_1} T_{1i} \\ \dot{T}_2 = \frac{k}{V_2 c_2} T_1 - \left(\frac{q_2}{V_2} + \frac{k}{V_2 c_2}\right) T_2 + \frac{q_2}{V_2} T_{2i} \end{cases}$$

¿Cuáles son las entradas y las salidas del sistema?
¿Es un sistema lineal?