Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 2, CLASE 2

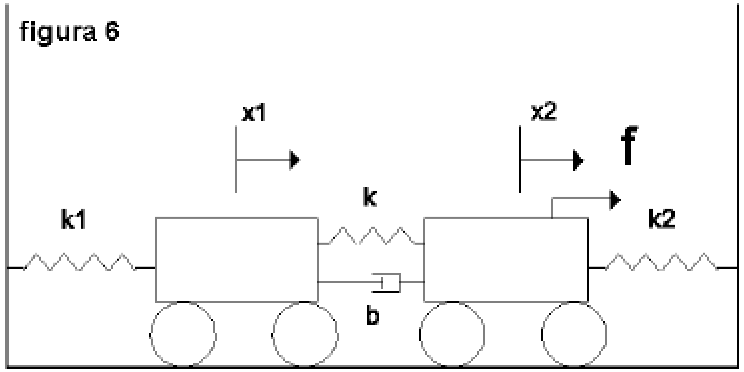
Hoja 2. Ejercicio 6.a

6) Dado el mecanismo de la **figura 6**, con dos carritos, tres resortes y un amortiguador de pistón, se considera su movimiento alrededor de la posición de reposo con el carro de masa $\mathbf{M_2}$ sometido a una fuerza variable **f(t)**.

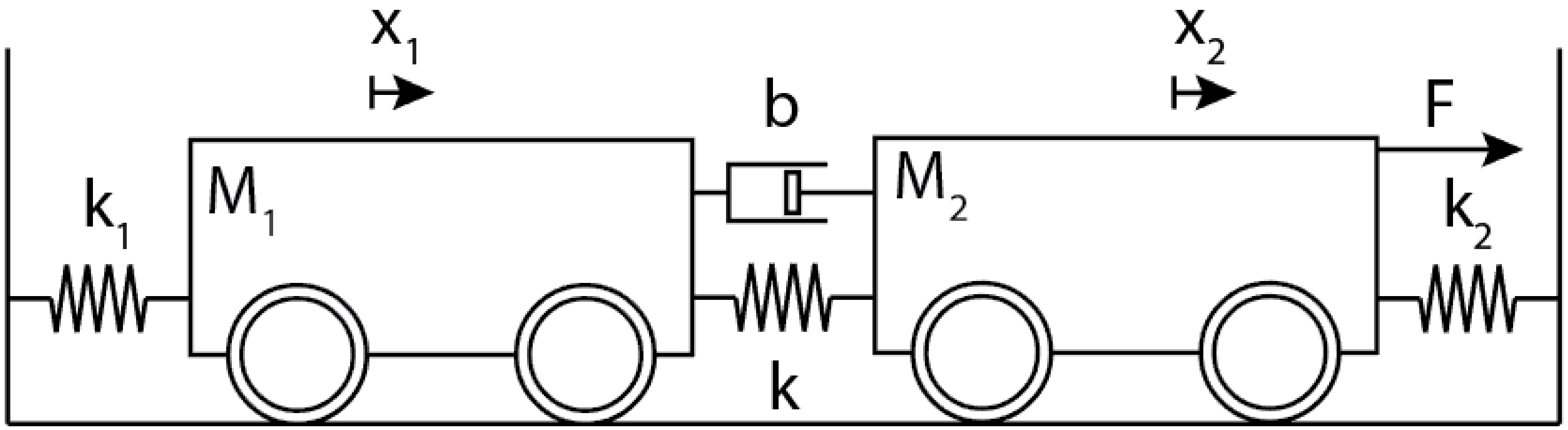
a) Modele el mecanismo con un sistema de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x + D.u \end{cases}$$

$$donde \quad u = f(t), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^t, \quad y = x$$

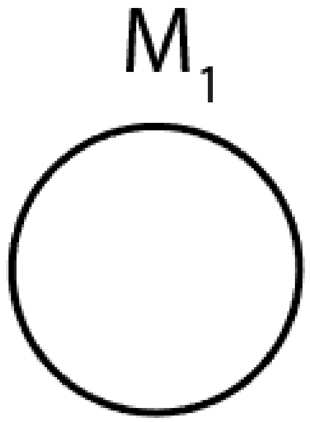


Hoja 2. Ejercicio 6.a



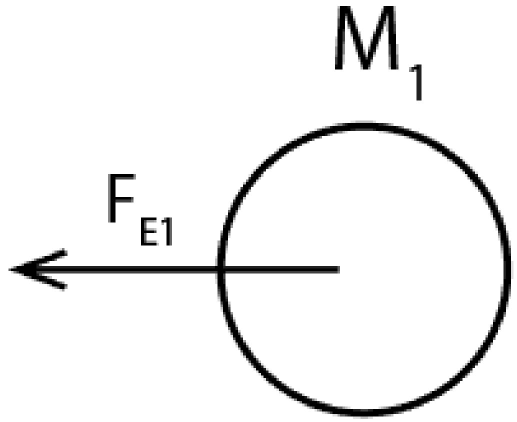
Hoja 2. Ejercicio 6.a

Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1



Hoja 2. Ejercicio 6.a

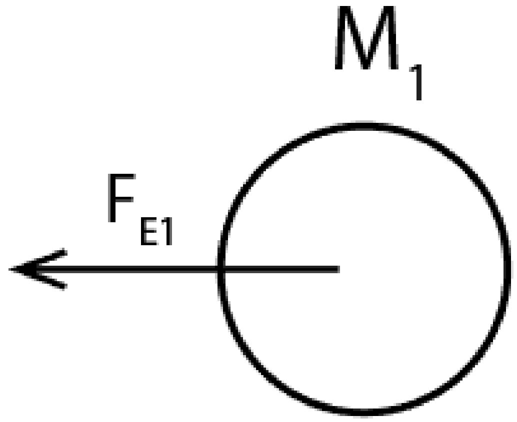
Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1



Hoja 2. Ejercicio 6.a

Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1

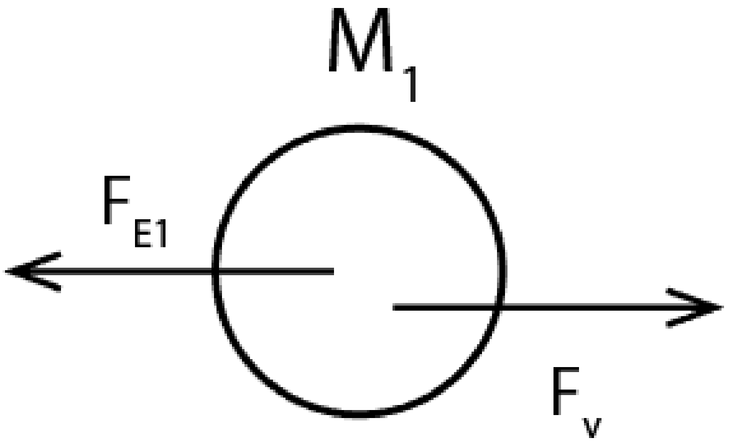
$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$, donde l_0^1 es la posición de M_1en la posición de equilibrio



Hoja 2. Ejercicio 6.a

Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1

$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$

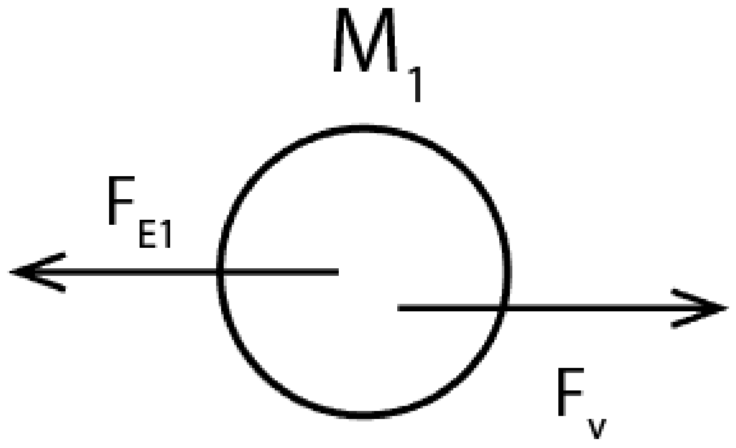


Hoja 2. Ejercicio 6.a

Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1

$$\left|\overrightarrow{F_{E1}}\right| = k_1(x_1 - l_0^1)$$

$$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

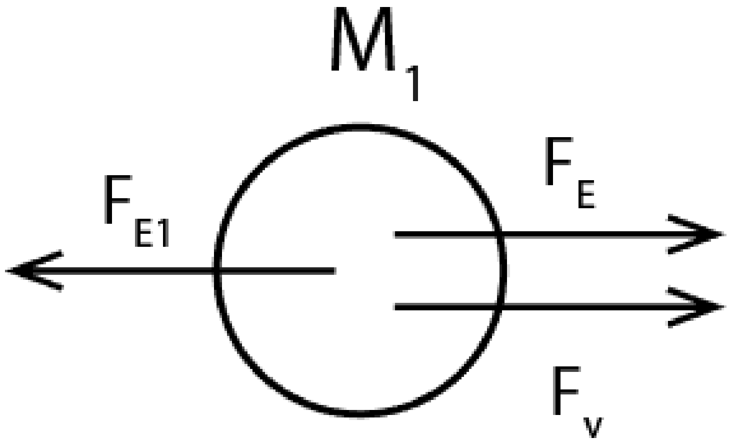


Hoja 2. Ejercicio 6.a

Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1

$\left|\overrightarrow{F_{E1}}\right| = k_1(x_1 - l_0^1)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$



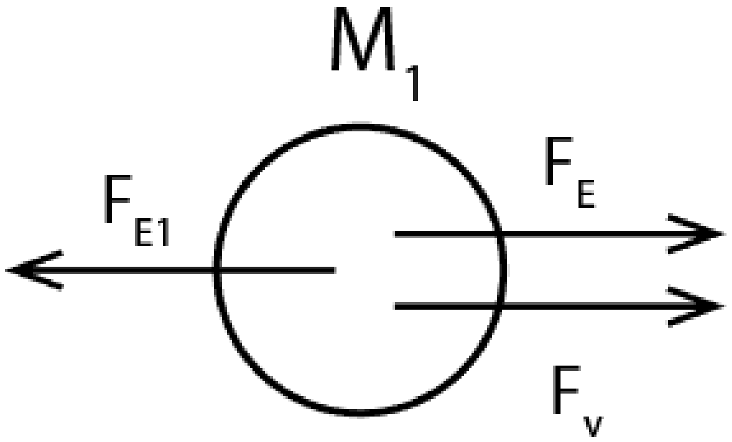
Hoja 2. Ejercicio 6.a

Comencemos por representar el diagrama de cuerpo libre del carro M_1

$\left|\overrightarrow{F_{E1}}\right| = k_1(x_1 - l_0^1)$

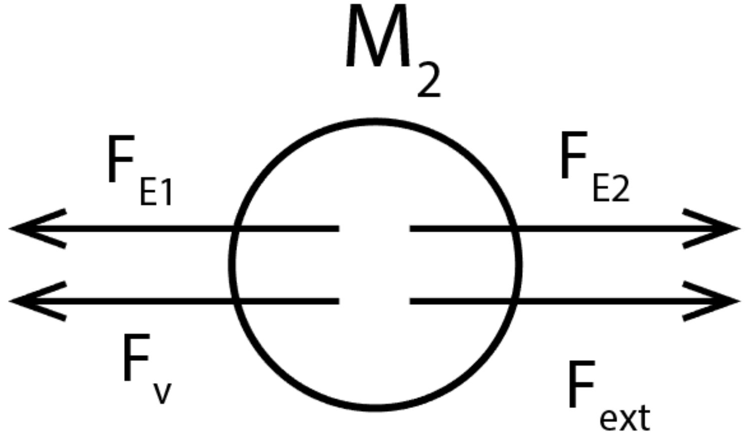
$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$\left|\overrightarrow{F_E}\right| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

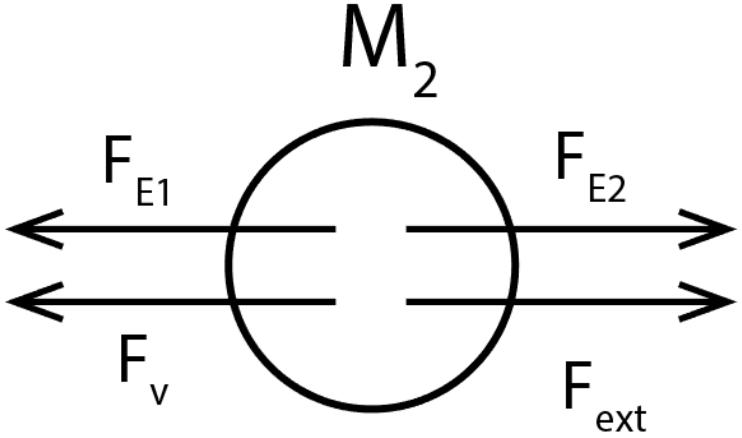
Repitamos el proceso para el carro de masa M_2



Hoja 2. Ejercicio 6.a

Repitamos el proceso para el carro de masa M_2

$$\left|\overrightarrow{F_E}\right| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

Repitamos el proceso para el carro de masa M_2

$\left|\overrightarrow{F_E}\right| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$ $\Rightarrow$ Tiene sentido este resultado?

Hoja 2. Ejercicio 6.a

Repitamos el proceso para el carro de masa M_2

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$ → Tiene sentido este resultado?

Pensemos un poco

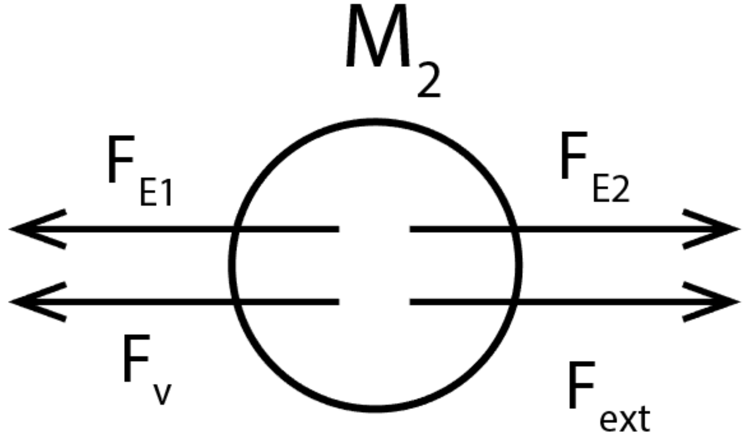
- Las únicas dos fuerzas que actúan en los extremos del resorte son las propias fuerzas elásticas (principio de acción y reacción)
- El resorte tiene masa nula
- $m_{res}.\ddot{x}_{res} = 0 = F_{E1} - F_{E2} \rightarrow F_{E1} = F_{E2}$
- Este resultado es válido para los demás resortes y el amortiguador

Hoja 2. Ejercicio 6.a

Repitamos el proceso para el carro de masa M_2

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$



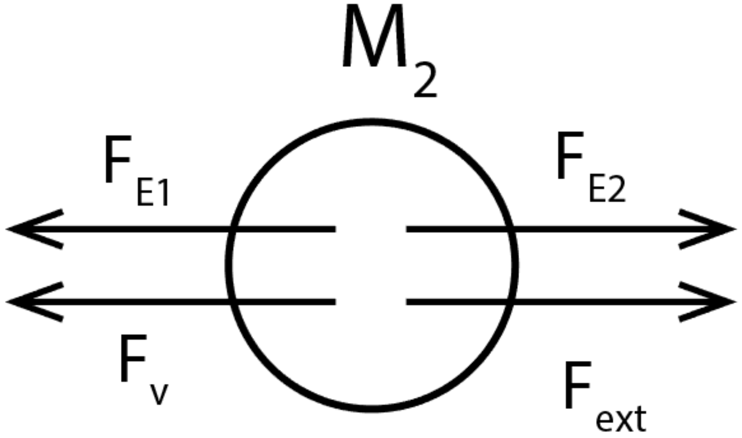
Hoja 2. Ejercicio 6.a

Repitamos el proceso para el carro de masa M_2

$$\left|\overrightarrow{F_E}\right| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$$

$$\left|\overrightarrow{F_v}\right| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\left|\overrightarrow{F_{E2}}\right| = k_2(x_2 - l_0^2)$$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

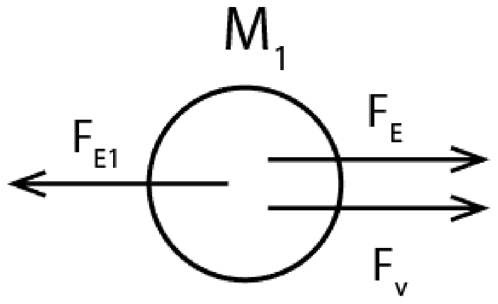
$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

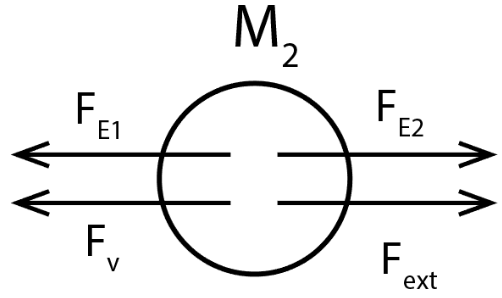
$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_{E2}}| = k_2(x_2 - l_0^2)$

$|\overrightarrow{F_{ext}}| = F_{ext}$





Hoja 2. Ejercicio 6.a

- Hallar el módulo de cada uno de los vectores es (más o menos) sencillo
- El problema está en poder ordenar la información en un conjunto de ecuaciones
- ¿Qué término “suma”? ¿Cuál “resta”?

Hoja 2. Ejercicio 6.a

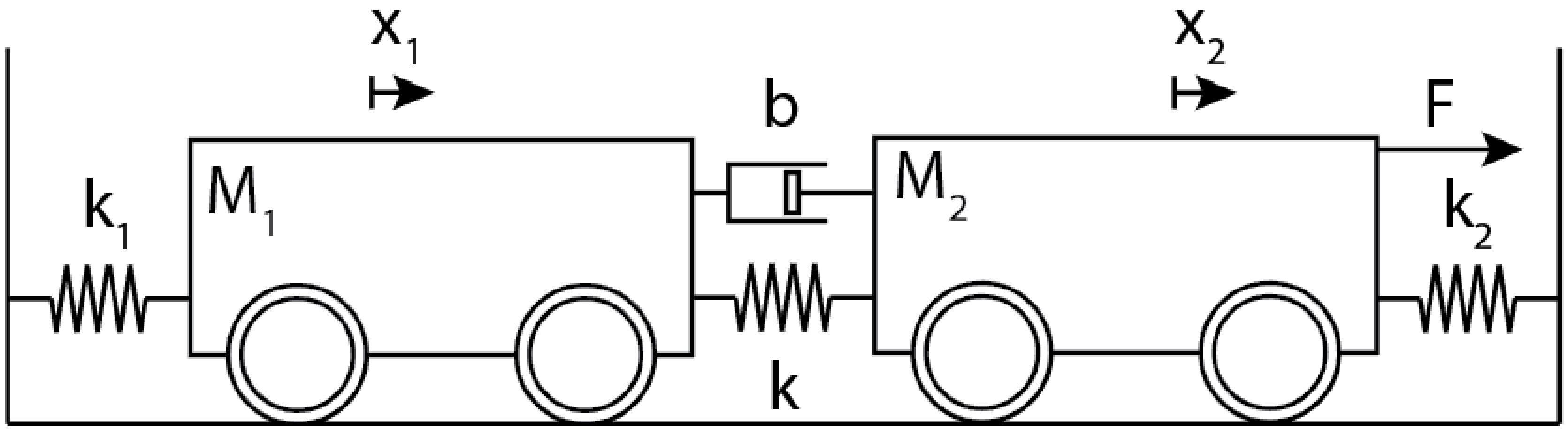
- Hallar el módulo de cada uno de los vectores es (más o menos) sencillo
- El problema está en poder ordenar la información en un conjunto de ecuaciones
- ¿Qué término “suma”? ¿Cuál “resta”?
- ¿Qué es sumar?

Hoja 2. Ejercicio 6.a

- Hallar el módulo de cada uno de los vectores es (más o menos) sencillo
- El problema está en poder ordenar la información en un conjunto de ecuaciones
- ¿Qué término “suma”? ¿Cuál “resta”?
- ¿Qué es sumar?
- Estrategia de resolución
  - Establecer una convención de signos clara
  - Introducir pequeños apartamientos

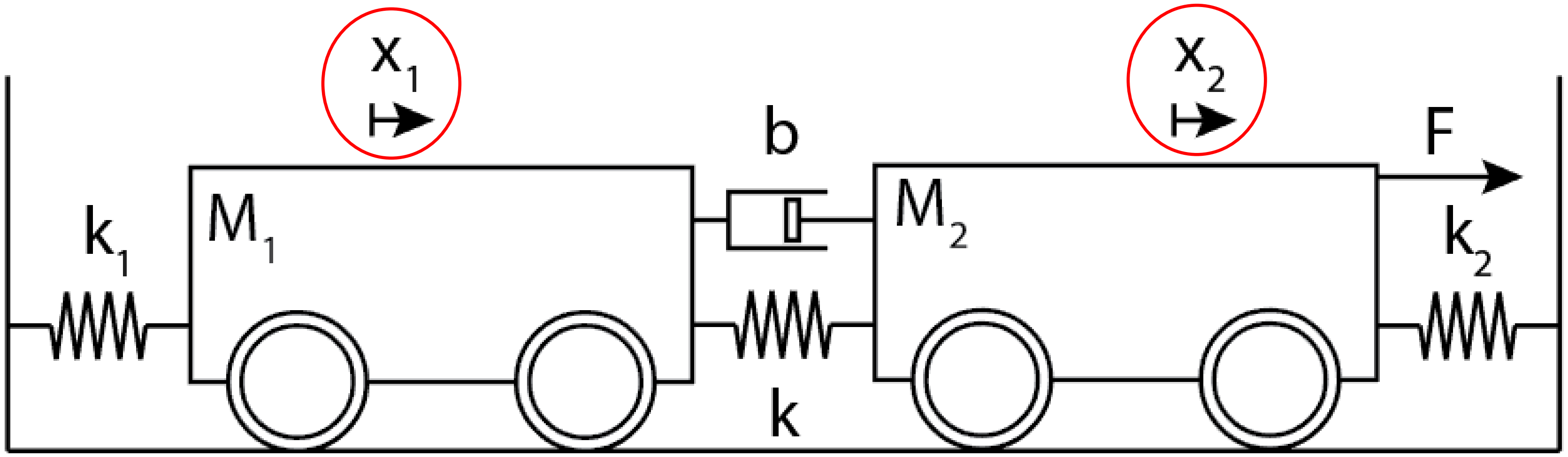
Hoja 2. Ejercicio 6.a

El ejercicio propone una convención de signos



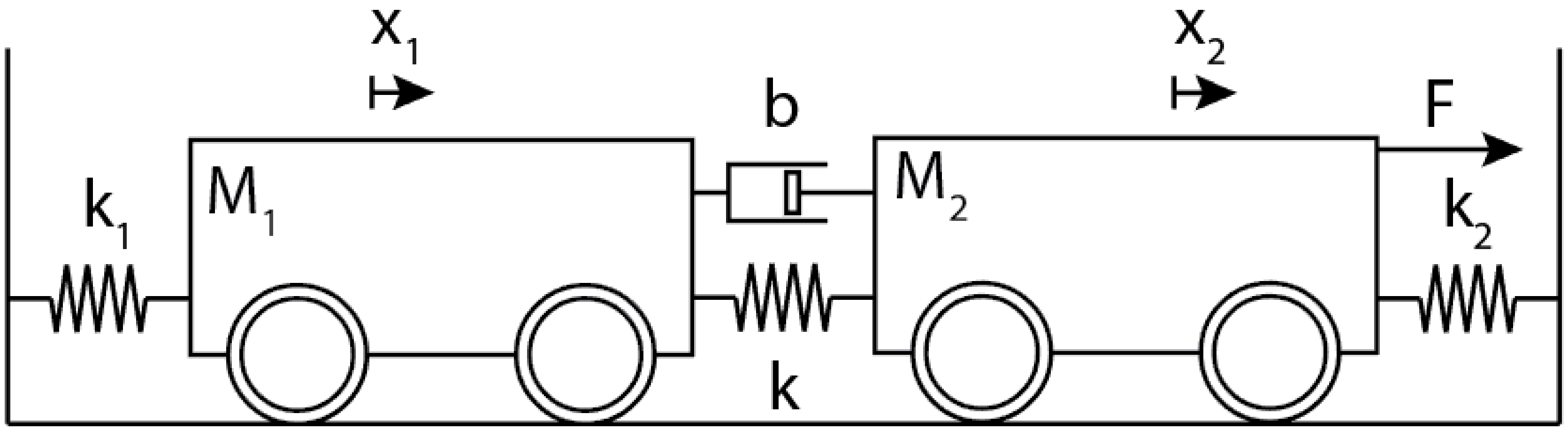
Hoja 2. Ejercicio 6.a

El ejercicio propone una convención de signos



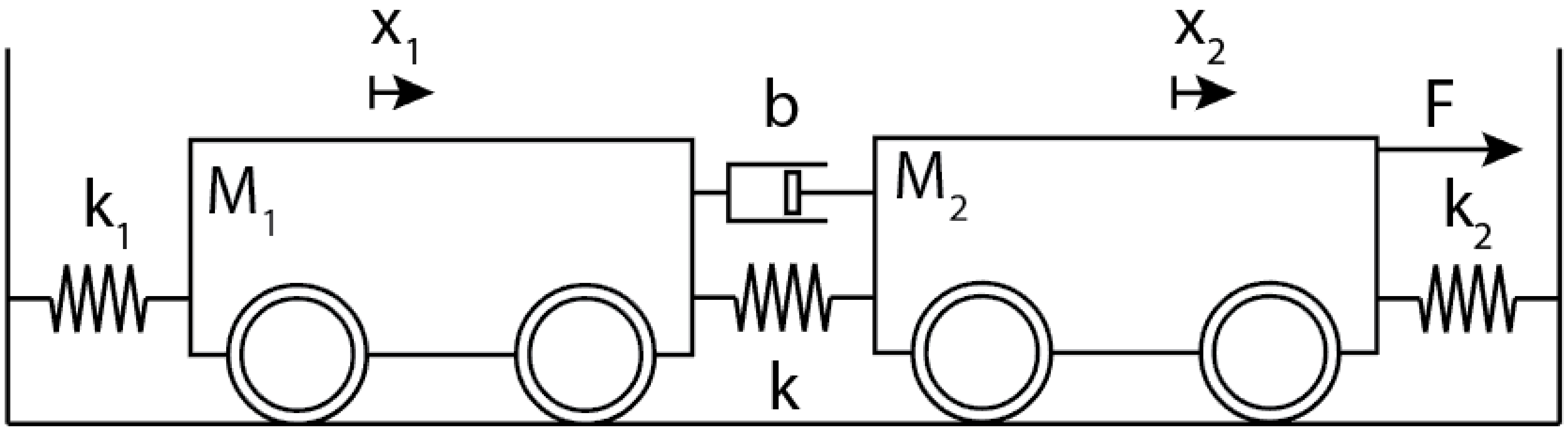
Hoja 2. Ejercicio 6.a

Introduzcamos un pequeño apartamiento de la posición de equilibrio en el carro de masa M_1



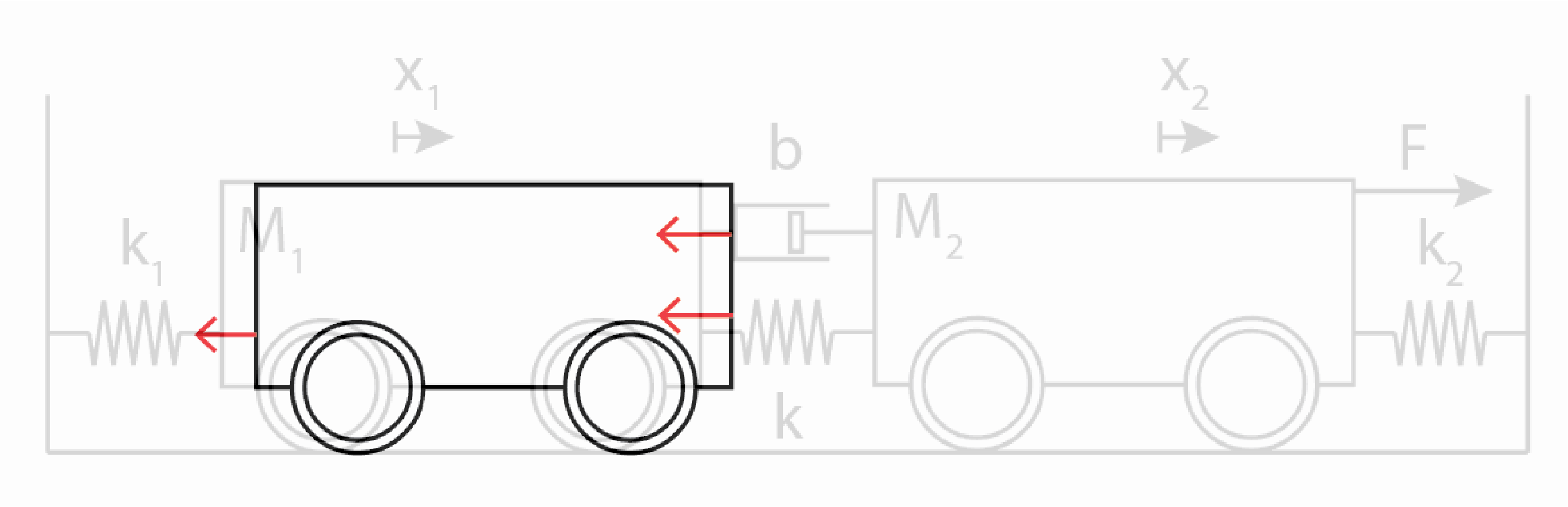
Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x}_1 = 0^+, \dot{x}_1 = 0^+$
$\ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_2 = l_0^2$



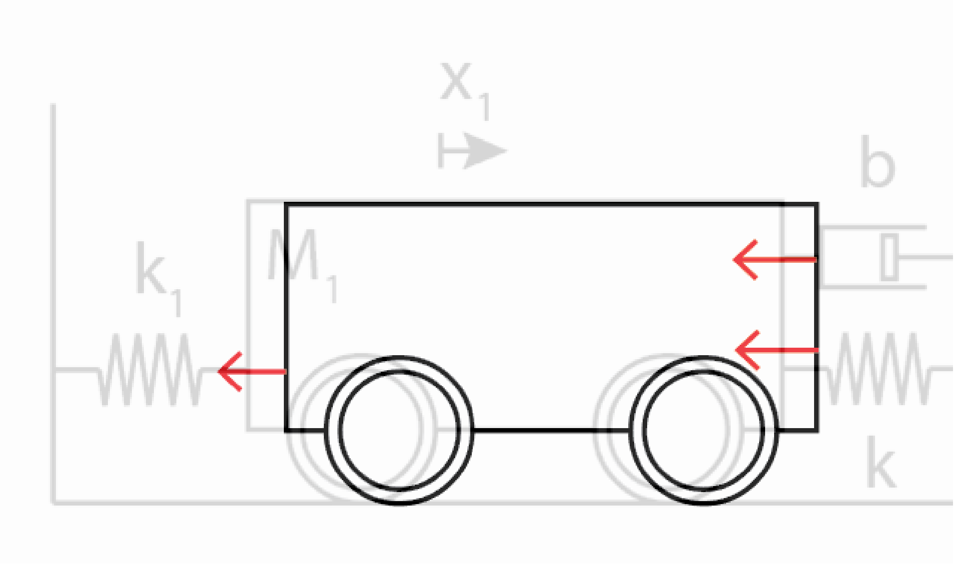
Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x}_1 = 0^+, \dot{x}_1 = 0^+$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x}_1 = 0^+, \dot{x}_1 = 0^+$
$\ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_2 = l_0^2$



$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$

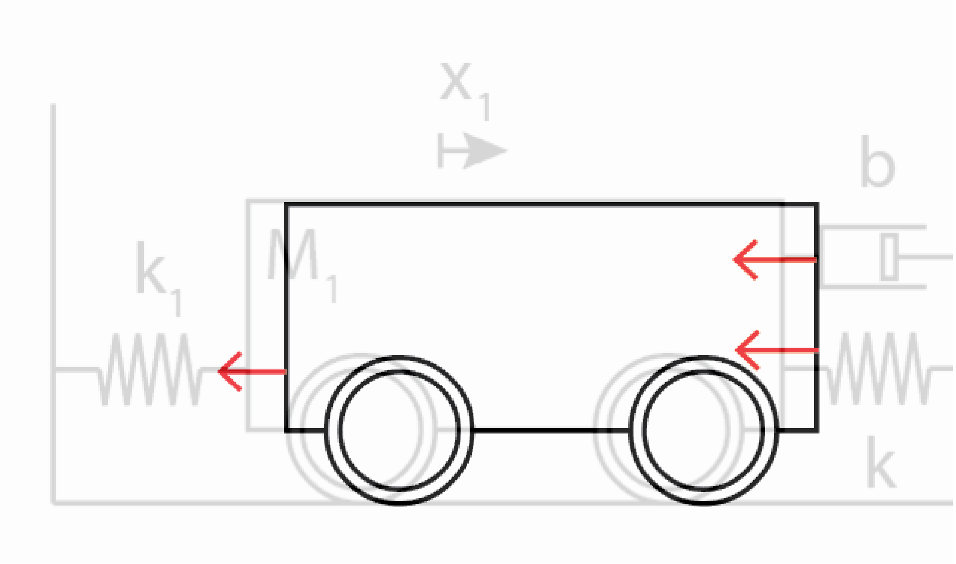
$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

2ª Ley de Newton) $M_1\ddot{x}_1 =$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x_1} = 0^+, \dot{x_1} = 0^+$
$\ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_2 = l_0^2$



$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$

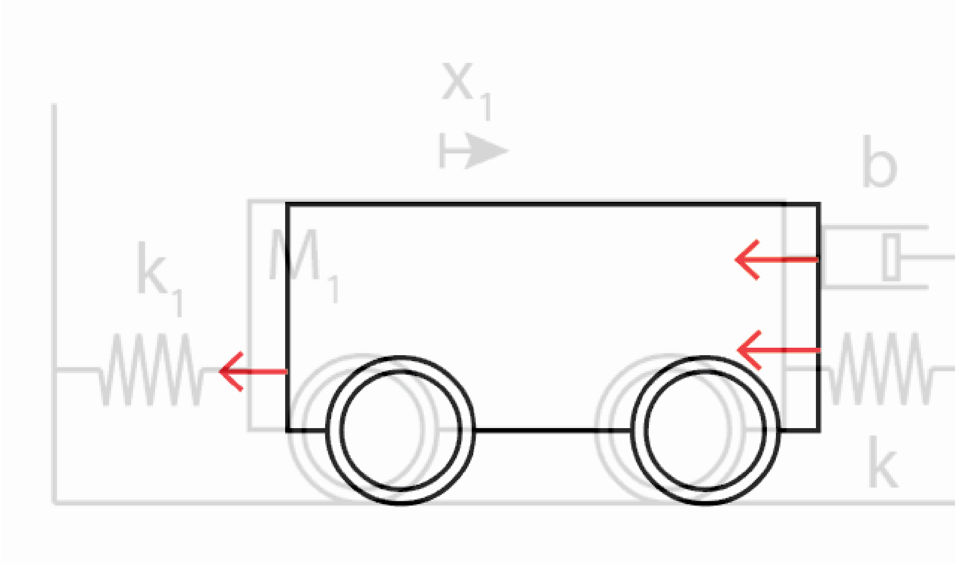
$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

2ª Ley de Newton) $M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1(x_1 - l_0^1)$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x}_1 = 0^+, \dot{x}_1 = 0^+$
$\ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_2 = l_0^2$



$$|\overrightarrow{F_{E1}}| = k_1(x_1 - l_0^1)$$

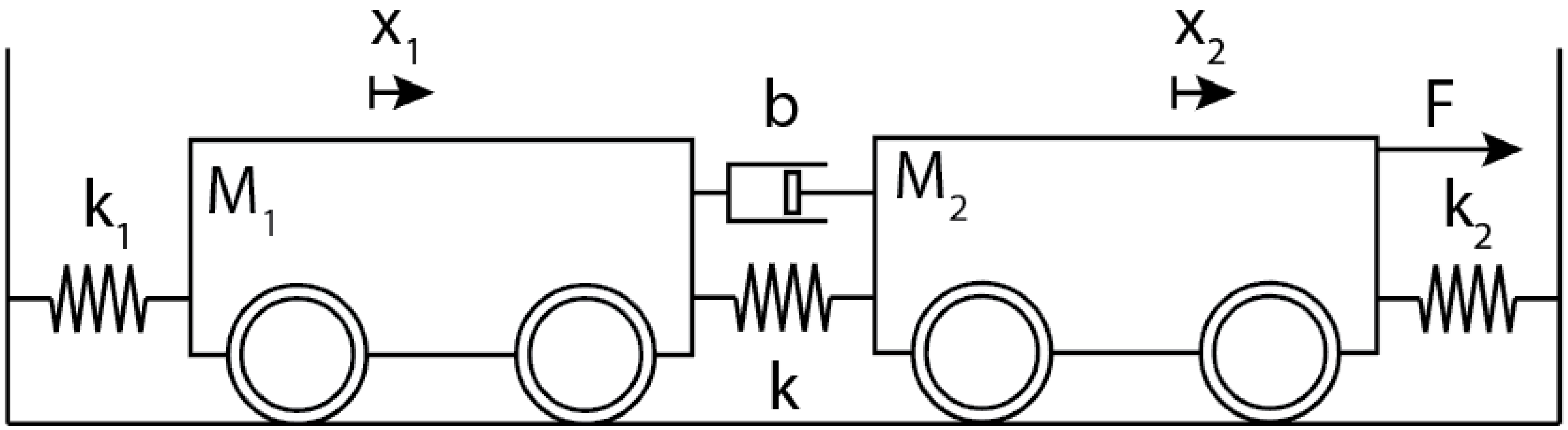
$$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$$

2ª Ley de Newton) $M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1(x_1 - l_0^1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

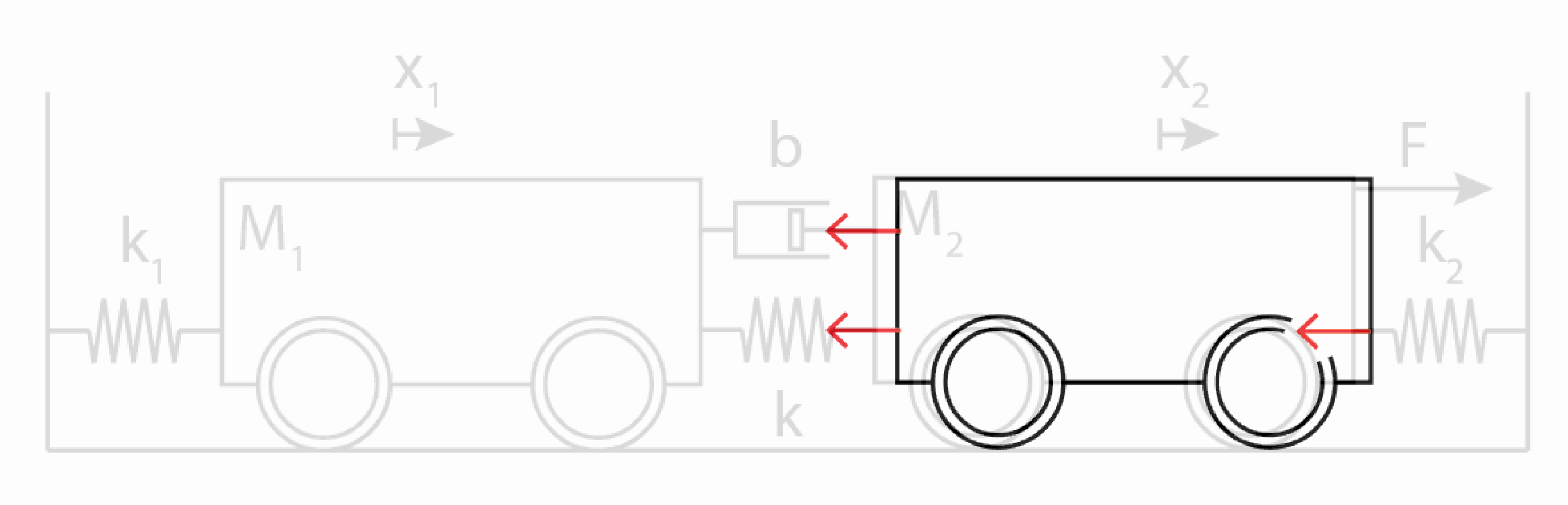
Hoja 2. Ejercicio 6.a

Introduzcamos un pequeño apartamiento de la posición de equilibrio en el carro de masa M_2



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\ddot{x}_2 = 0^+, \dot{x}_2 = 0^+$
$\ddot{x}_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_1 = l_0^2$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

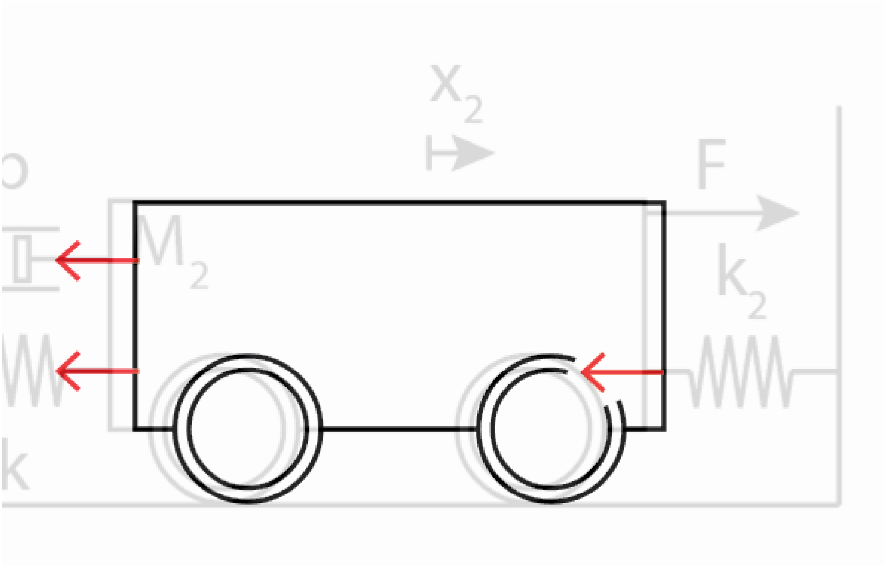
$\ddot{x}_2 = 0^+, \dot{x}_2 = 0^+$
$\ddot{x}_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_1 = l_0^2$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_{E2}}| = k_2(x_2 - l_0^2)$

$|\overrightarrow{F_{ext}}| = F_{ext}$



2ª Ley de Newton) $M_2\ddot{x}_2 =$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

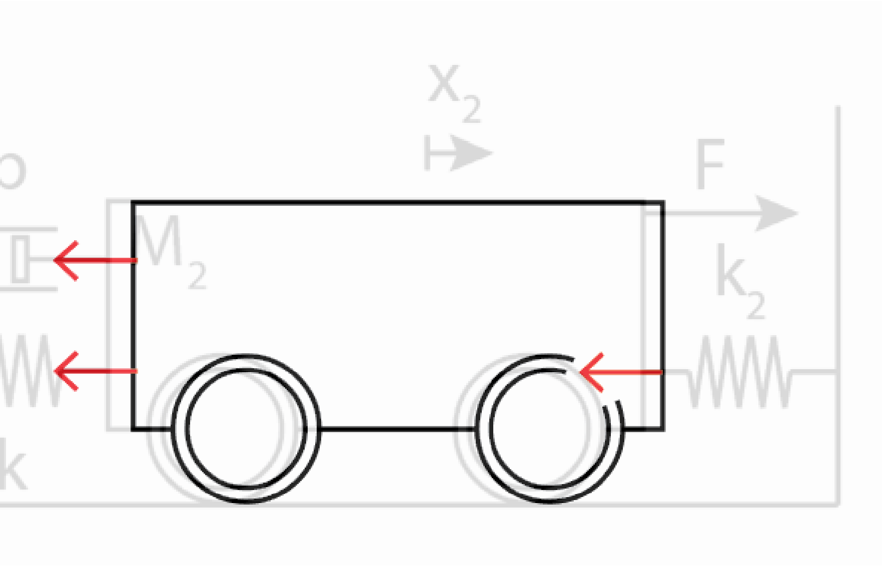
$\ddot{x}_2 = 0^+, \dot{x}_2 = 0^+$
$\ddot{x}_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_1 = l_0^2$

$$\left|\overrightarrow{F_E}\right| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$$

$$\left|\overrightarrow{F_v}\right| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\left|\overrightarrow{F_{E2}}\right| = k_2(x_2 - l_0^2)$$

$$\left|\overrightarrow{F_{ext}}\right| = F_{ext}$$



2ª Ley de Newton) $M_2\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

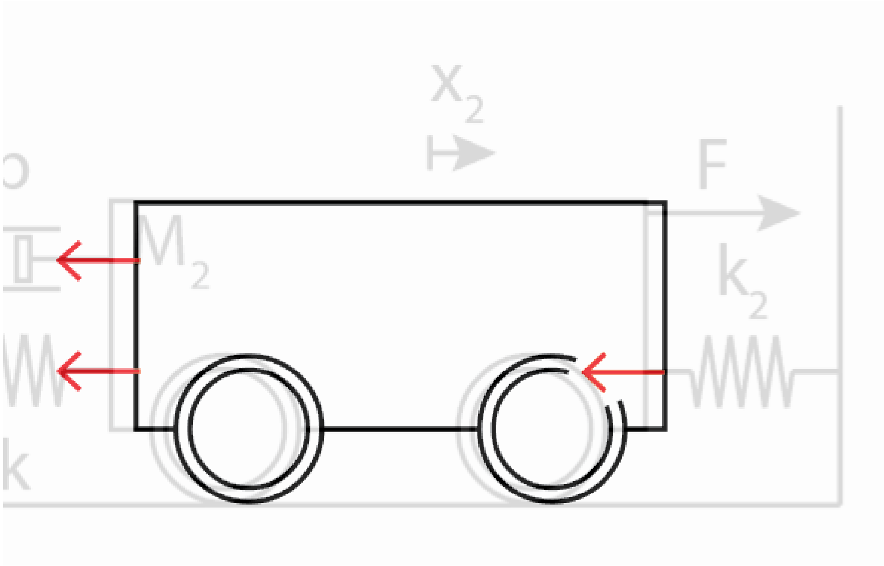
$\ddot{x}_2 = 0^+, \dot{x}_2 = 0^+$
$\ddot{x}_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_1 = l_0^2$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_{E2}}| = k_2(x_2 - l_0^2)$

$|\overrightarrow{F_{ext}}| = F_{ext}$



2ª Ley de Newton) $M_2\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - l_0^2)$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

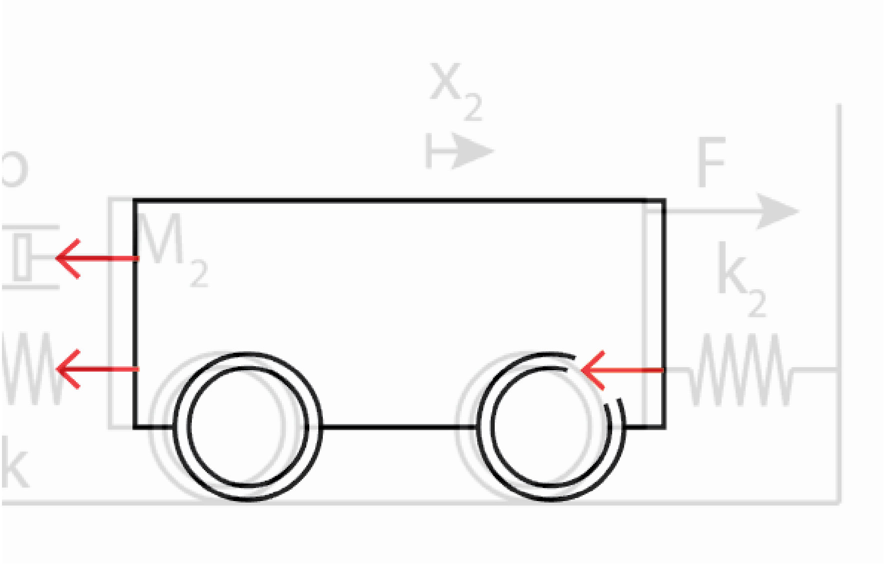
$\ddot{x}_2 = 0^+, \dot{x}_2 = 0^+$
$\ddot{x}_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_1 = l_0^2$

$|\overrightarrow{F_E}| = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right)$

$|\overrightarrow{F_v}| = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$|\overrightarrow{F_{E2}}| = k_2(x_2 - l_0^2)$

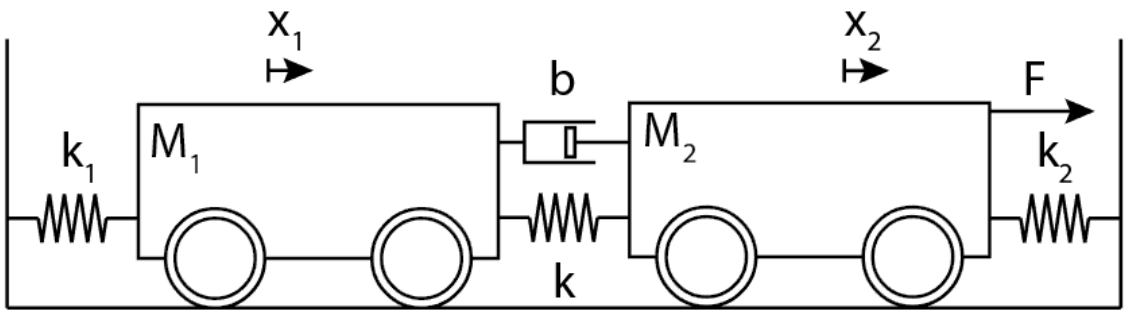
$|\overrightarrow{F_{ext}}| = F_{ext}$



2ª Ley de Newton) $M_2\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - l_0^2) + \mathrm{F_{ext}}$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

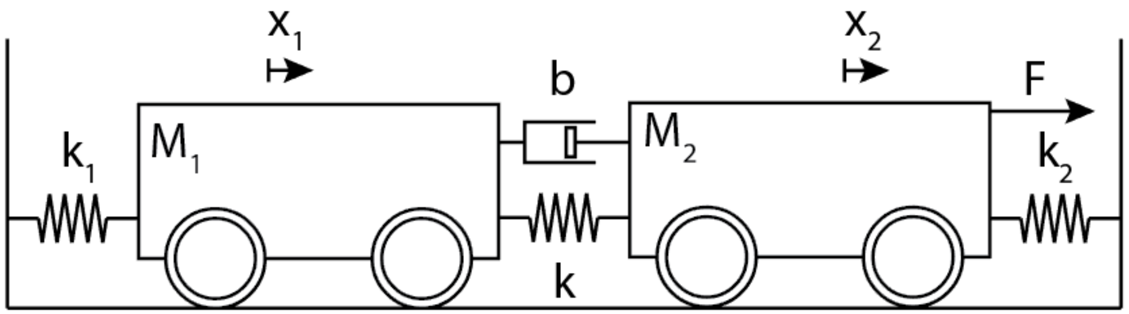
$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1(x_1 - l_0^1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) \\ M_1\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - l_0^2) + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1(x_1 - l_0^1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) \\ M_1\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - l_0^2) + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$

Las ecuaciones que obtuvimos no tienen la forma deseada



Hoja 2. Ejercicio 6.a

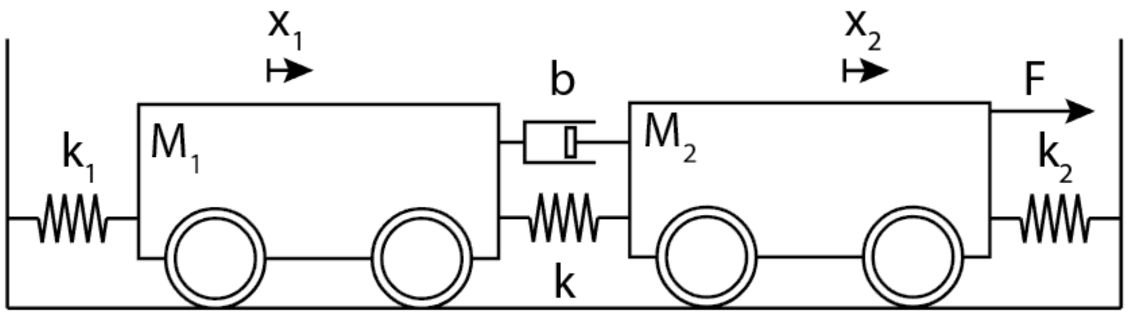
$$
\begin{cases}
M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1(x_1 - l_0^1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) \\
M_1\ddot{x}_2 = k\left((x_1 - x_2) - (l_0^1 - l_0^2)\right) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - l_0^2) + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}}
\end{cases}
$$

Las ecuaciones que obtuvimos no tienen la forma deseada

Cambio de variable

$x_1' = x_1 - l_0^1$

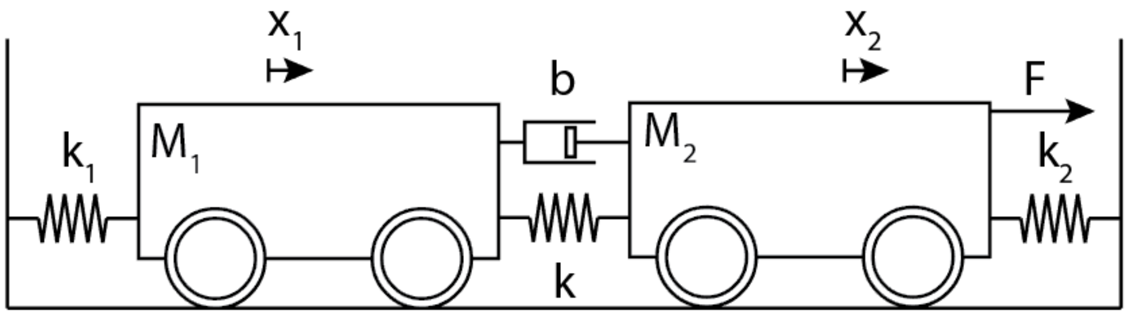
$x_2' = x_2 - l_0^2$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

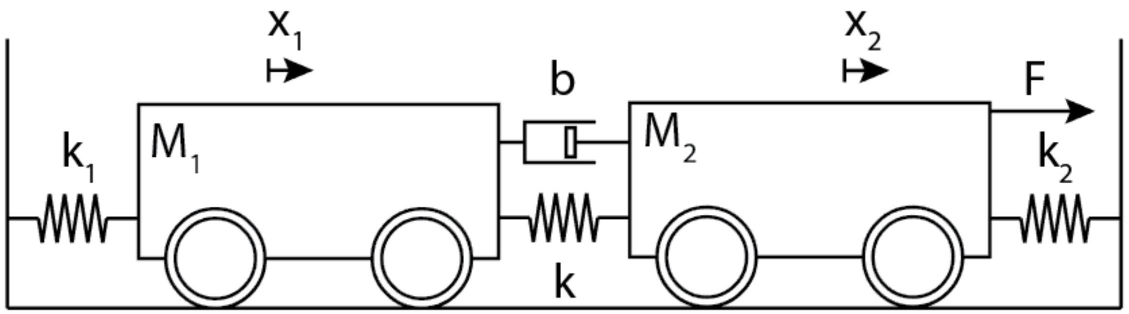
$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1x_1 - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k(x_1 - x_2) \\ M_1\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$

(Se omiten los tildes por claridad)



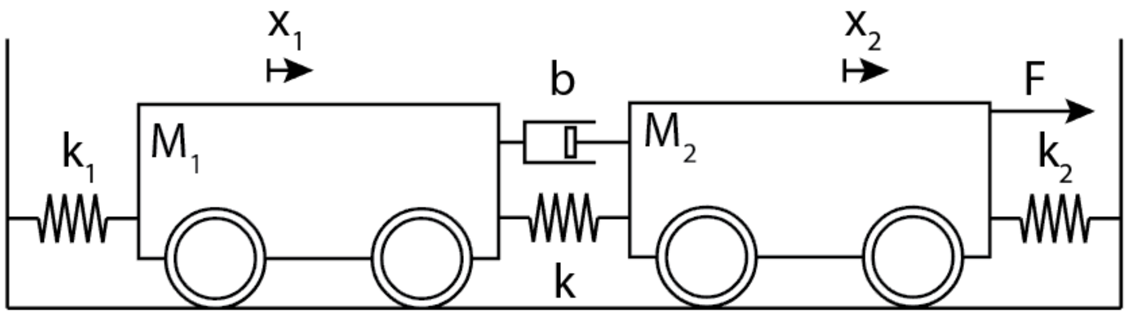
Hoja 2. Ejercicio 6.a

- ¿Es necesario este cambio de variable "caprichoso"?
  - No, lo podemos resolver pensando
  - El problema surge de una asunción equivocada: En el estado de reposo, los resortes no necesariamente ejercen fuerza nula



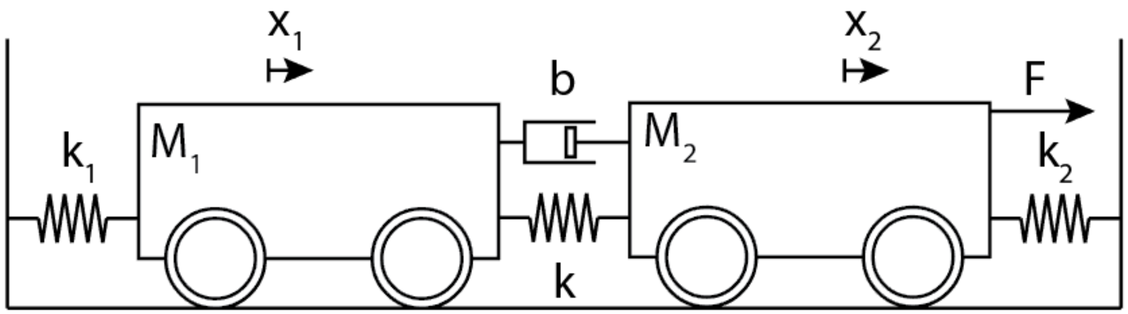
Hoja 2. Ejercicio 6.a

- ¿Es necesario este cambio de variable "caprichoso"?
  - No, lo podemos resolver pensando
  - El problema surge de una asunción equivocada: En el estado de reposo, los resortes no necesariamente ejercen fuerza nula
  - Reposo: $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

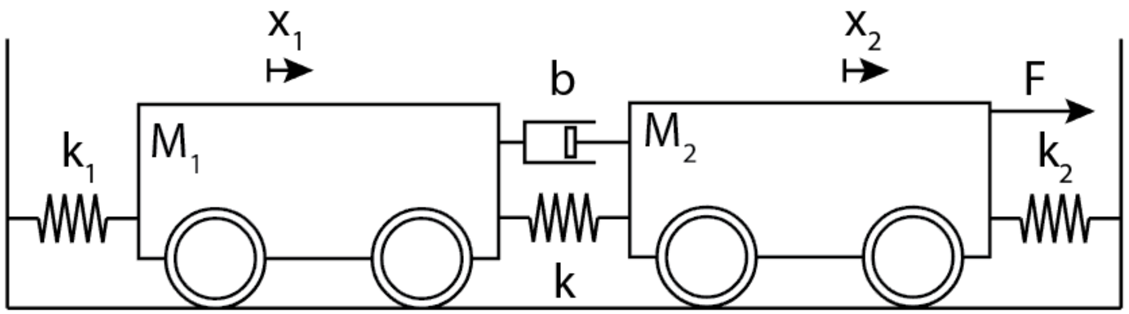
Sustituyendo, $\begin{cases} k_1 l_0^1 = k(l_0^1 - l_0^2) \\ k(l_0^1 - l_0^2) = k_2 l_0^2 \end{cases}$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1x_1 - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k(x_1 - x_2) \\ M_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 + \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$

Llevemos esta expresión a la forma $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$



Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k_1}{M_1} x_1 - \dfrac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \dfrac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k_2}{M_2} x_2 + \dfrac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} [f(t)]$$

Estos son más o menos obvios

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k_1}{M_1} x_1 - \dfrac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \dfrac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k_2}{M_2} x_2 + \dfrac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} - \frac{k}{M_1} & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k_1}{M_1} x_1 - \dfrac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \dfrac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k_2}{M_2} x_2 + \dfrac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} - \frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{M_1} x_1 - \frac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \frac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \frac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{k_2}{M_2} x_2 + \frac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} - \frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k_1}{M_1} x_1 - \dfrac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \dfrac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k_2}{M_2} x_2 + \dfrac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} - \frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{b}{M_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k_1}{M_1} x_1 - \dfrac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \dfrac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dfrac{k_2}{M_2} x_2 + \dfrac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$\dot{x} = Ax + Bu$, con $x = [x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2}]$, $u = f(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} - \frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{b}{M_1} \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} - \frac{k_2}{M_2} & \frac{b}{M_2} & -\frac{b}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{M_1} x_1 - \frac{b}{M_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{k}{M_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = \frac{k}{M_2}(x_1 - x_2) + \frac{b}{M_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{k_2}{M_2} x_2 + \frac{\mathrm{F_{ext}}}{M_2} \end{cases}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.a

$y = Cx + Du$

Por letra, sabemos que $y = x$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [f(t)]$$

Hoja 2. Ejercicio 6.b

b) Deduzca la matriz de transferencia **H(s)** para condiciones iniciales nulas.

Hoja 2. Ejercicio 6.b

- Dos formas de calcular $H(s)$
  - $H(s) = \mathrm{C}(sI - A)^{-1}B$
  - Aplicando propiedades de Laplace → Vamos a usar esta
- ¿Qué debemos hallar?
  - $H(s) = \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F(s)} \\ \frac{\dot{X}_1(s)}{F(s)} \\ \frac{\dot{X}_2(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F(s)} \\ \frac{X_1(s).s}{F(s)} \\ \frac{X_2(s).s}{F(s)} \end{bmatrix}$

Hoja 2. Ejercicio 6.b

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = -\,k_1x_1 - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k(x_1 - x_2) \\ M_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 + \mathrm{F_{ext}} \end{cases}$$

Transformo

$$\mathcal{L}\big(x(t)\big) = X(s)$$

$$\mathcal{L}\big(\dot{x}(t)\big) = s.X(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\big(\ddot{x}(t)\big) = s.\dot{X}(s) - \dot{x}(0) = s.[s.X(s) - x(0)] - \dot{x}(0)$$

Considerando que la función de transferencia se define para cond. Iniciales nulas, sustituyo

Hoja 2. Ejercicio 6.b

$$\begin{cases} M_1X_1s^2 = -\,k_1X_1 - bs(X_1 - X_2) - k(X_1 - X_2) \\ M_2X_2s^2 = k(X_1 - X_2) + bs(X_1 - X_2) - k_2X_2 + \mathrm{F_{ext}} \end{cases}$$

$$X_1(M_1s^2 + bs + k_1 + k) = (bs + k)X_2$$

$$X_1 = \frac{(bs+k)}{(M_1s^2+bs+k_1+k)}X_2$$

$$M_2X_2s^2 = k(X_1 - X_2) + bs(X_1 - X_2) - k_2X_2 + \mathrm{F_{ext}}$$

$$X_2(M_2s^2 + bs + k + k_2) = X_1(bs + k) + \mathrm{F_{ext}}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.b

$$\begin{cases} M_1X_1s^2 = -k_1X_1 - bs(X_1 - X_2) - k(X_1 - X_2) \\ M_2X_2s^2 = k(X_1 - X_2) + bs(X_1 - X_2) - k_2X_2 + \mathrm{F_{ext}} \end{cases}$$

$$X_1(M_1s^2 + bs + k_1 + k) = (bs + k)X_2$$

$$X_1 = \frac{(bs+k)}{(M_1s^2+bs+k_1+k)}X_2$$

$$M_2X_2s^2 = k(X_1 - X_2) + bs(X_1 - X_2) - k_2X_2 + \mathrm{F_{ext}}$$

$$X_2(M_2s^2 + bs + k + k_2) = X_1(bs + k) + \mathrm{F_{ext}}$$

$$X_2(M_2s^2 + bs + k + k_2) = \frac{(bs+k)^2X_2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)} + \mathrm{F_{ext}}$$

Hoja 2. Ejercicio 6.b

$$X_2(M_2s^2 + bs + k + k_2) = \frac{(bs+k)^2 X_2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)} + \mathrm{F_{ext}}$$

$$X_2\left[(M_2s^2 + bs + k + k_2) - \frac{(bs+k)^2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)}\right] = \mathrm{F_{ext}}$$

$$\frac{X_2}{\mathrm{F_{ext}}} = \frac{1}{\left[(M_2s^2+bs+k+k_2)-\frac{(bs+k)^2}{(M_1s^2+bs+k_1+k)}\right]}$$

Sustituyendo hacia atrás obtenemos $\frac{X_1}{F_{ext}}$ y sus derivadas