Teoría de Circuitos - Práctico 4

Material complementario
Cálculo de valores eficaces

2023 - Semestre

El valor eficaz o efectivo de una señal periódica es muy útil en muchas aplicaciones de la ingeniería eléctrica.

El el curso usaremos mucho el valor eficaz de una sinusoide, pero es bueno tener presente el carácter general del valor eficaz.

Se presenta aquí el cálculo de los valores eficaces de algunas señales paradigmáticas.

Recordemos la definición. Para una señal $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica, de periodo τ, se define el número real positivo

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)^2 dt} \tag{1}$$

Ejemplo 1 - Señal sinusoidal:
Sea $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, con A y ω_0 positivos. El periodo es $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$. A partir de (1), calculemos el valor eficaz. Por comodidad, elevamos al cuadrado.

$$X_{eff}^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)dt$$

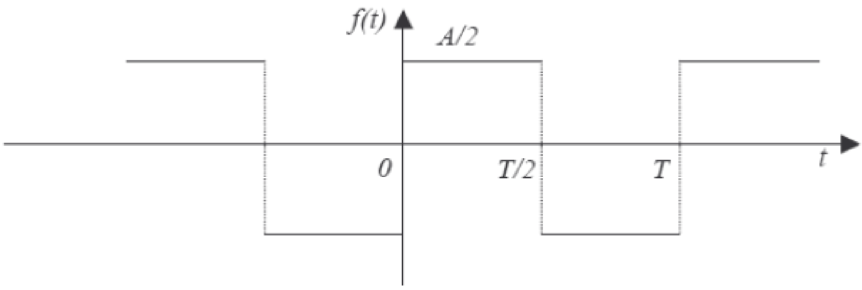
Usamos la identidad $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$. Entonces:

$$X_{eff}^2 = \frac{\omega_0 A^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \left[\frac{1+\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)}{2}\right] dt = \frac{\omega_0 A^2}{4\pi}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)dt\right]$$

En la expresión de más a la derecha, la segunda integral se anula, ya que es el integrando es una sinusoide y el intervalo de integración abarca dos periodos. Entonces

$$X_{eff}^2 = \frac{\omega_0 A^2}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} dt = \frac{\omega_0 A^2}{4\pi}.\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{A^2}{2} \Rightarrow X_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo 2 - Onda cuadrada 1:
Consideremos la onda cuadrada simétrica $f(t)$ de la figura, que oscila entre los valores $\pm\frac{A}{2}$, permaneciendo el mismo



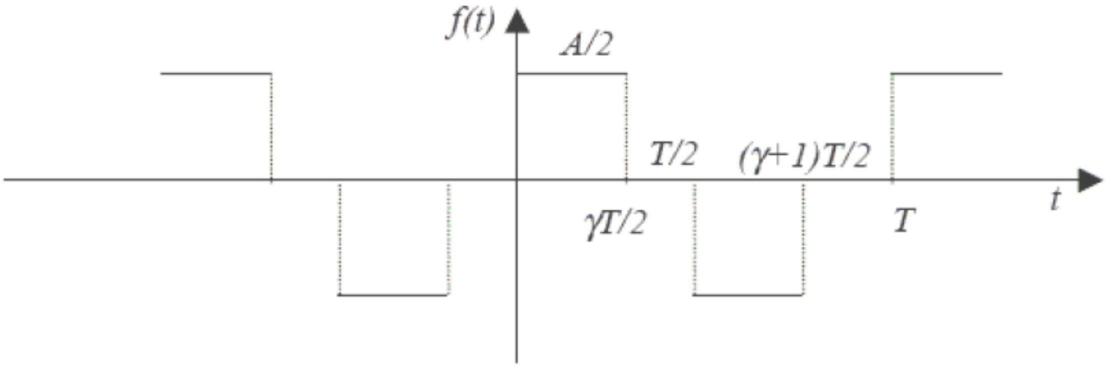
tiempo -la mitad del periodo- en cada valor. A partir de (1), calculemos el valor eficaz. Por comodidad, elevamos al cuadrado.

$$F_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{A}{2}\right)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(-\frac{A}{2}\right)^2 dt\right] = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T}\left(\frac{A}{2}\right)^2 dt\right] = \frac{1}{T}.\frac{A^2}{4}.T = \frac{A^2}{4}$$

Entonces:

$$F_{eff} = \frac{A}{2}$$

Ejemplo 3 - Onda cuadrada 2:
Consideremos la onda cuadrada no simétrica $f(t)$ de la figura, que oscila entre tres valores $+\frac{A}{2}$, 0 y $-\frac{A}{2}$. El parámetro



γ $(0 < \gamma < 1)$ define los tiempos en los que la señal está en cada valor durante un periodo. A partir de (1), calculemos el valor eficaz. Por comodidad, elevamos al cuadrado.

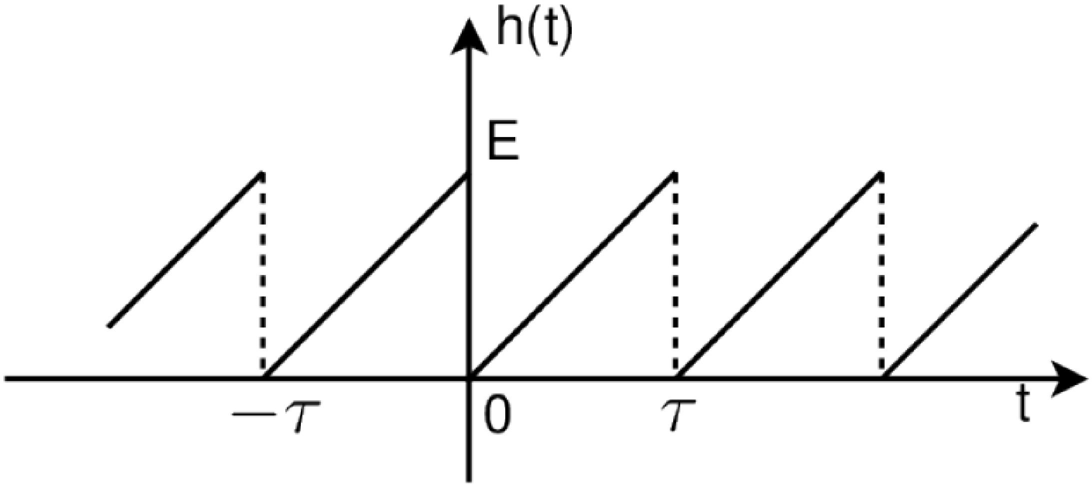
$$F_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\gamma.\frac{T}{2}}\left(\frac{A}{2}\right)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^{(\gamma+1).\frac{T}{2}}\left(-\frac{A}{2}\right)^2 dt\right] = \frac{1}{T}.\frac{A^2}{4}\left[\int_0^{\gamma.\frac{T}{2}} dt + \int_{\frac{T}{2}}^{(\gamma+1).\frac{T}{2}} dt\right]$$

$$F_{eff}^2 = \frac{1}{T}.\frac{A^2}{4}\left[\gamma.\frac{T}{2} + \gamma.\frac{T}{2}\right] = \gamma.\frac{A^2}{4}$$

Entonces:

$$F_{eff} = \sqrt{\gamma}.\frac{A}{2}$$

Ejemplo 4 - Onda triangular:
Consideremos la onda triangular $h(t)$ de la figura, que en un periodo crece linealmente desde 0, con pendiente $\frac{E}{\tau}$,



siendo τ el periodo de la señal. A partir de (1), calculemos el valor eficaz. Por comodidad, elevamos al cuadrado.

$$H_{eff}^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} h(t)^2 dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\tau}\left(\frac{E}{\tau}.t\right)^2 dt\right] = \frac{1}{\tau}.\frac{E^2}{\tau^2}\int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{E^2}{\tau^3}.\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\tau} = \frac{E^2}{\tau^3}.\frac{\tau^3}{3} = \frac{E^2}{3}$$

Entonces:

$$E_{eff} = \frac{E}{\sqrt{3}}$$