18/8

Autonoma: $x' = f(x)$

$c)$ Se definen, para el número real $a > 0$ fijo, la distribución

$$\delta(t-a) = \text{“}\lim_{\epsilon\to 0^+}\text{”} P_\epsilon(t-a)$$

y la transformada de Laplace de $\delta(t-a)$ como el $\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{L}[P_\epsilon(t-a)]$. Hallar $(\mathcal{L}[\delta(t-a)])(p)$ y agregarla a la tabla. Comparar el resultado obtenido con la propiedad de traslación en el tiempo.

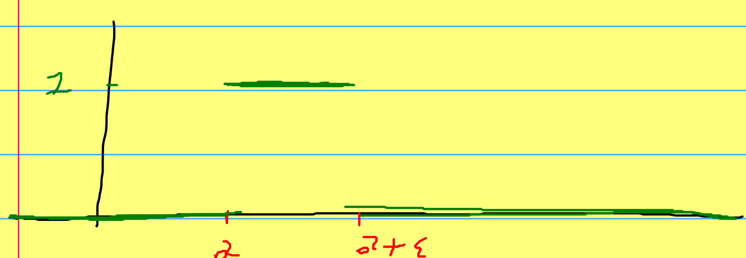
$$P_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[H(t) - H(t-\varepsilon)\right] \qquad \varepsilon > 0$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{L}(P_\varepsilon(t-a))(s)$$

1) $$P_\varepsilon(t-a) = \frac{1}{\varepsilon}\left[H(t-a) - H(t-a-\varepsilon)\right]$$

$$H(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-a \geq 0 \\ 0 & \text{si } t-a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

$$H(t-a-\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-a-\varepsilon \geq 0 \\ 0 & \text{si } t-a-\varepsilon < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a+\varepsilon \\ 0 & \text{si } t < a+\varepsilon \end{cases}$$



$$P_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } a \leq t \leq a+\varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2) $\mathcal{L}(P_\varepsilon(t-a))(s) = \int_0^{+\infty} P_\varepsilon(t-a)\, e^{-st}\, dt$

$$= \int_0^{a} \underbrace{P_\varepsilon(t-a)}_{=0} e^{-st}\,dt + \int_a^{a+\varepsilon} \underbrace{P_\varepsilon(t-a)}_{1/\varepsilon} e^{-st}\,dt + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \underbrace{P_\varepsilon(t-a)}_{=0} e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{\varepsilon s}\, e^{-st}\Big|_a^{a+\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon s}\left[e^{-s(a+\varepsilon)} - e^{-sa}\right]$$

Primitiva: $-\frac{1}{s}e^{-st}$

$$= \frac{e^{-sa} - e^{-s(a+\varepsilon)}}{\varepsilon s}$$

3) $\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{L}(P_\varepsilon(t-a))(s) =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\overbrace{e^{-sa} - e^{-s(a+\varepsilon)}}^{f}}{\underbrace{\varepsilon s}_{g}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{s e^{-s(a+\varepsilon)}}{s}$$

$f' = s e^{-s(a+\varepsilon)}$

$g' = s$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{-s(a+\varepsilon)} = e^{-sa}$$

• Obs: La vez pasada vimos que $\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$, y ahora vimos que $\underbrace{\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = e^{-sa}}_{\text{Trasladamos en el tiempo}} = 1 \cdot e^{-sa}$

5. Usar la siguiente fórmula de la transformada de Laplace de una función períodica $f(t)$ con período c:

2π

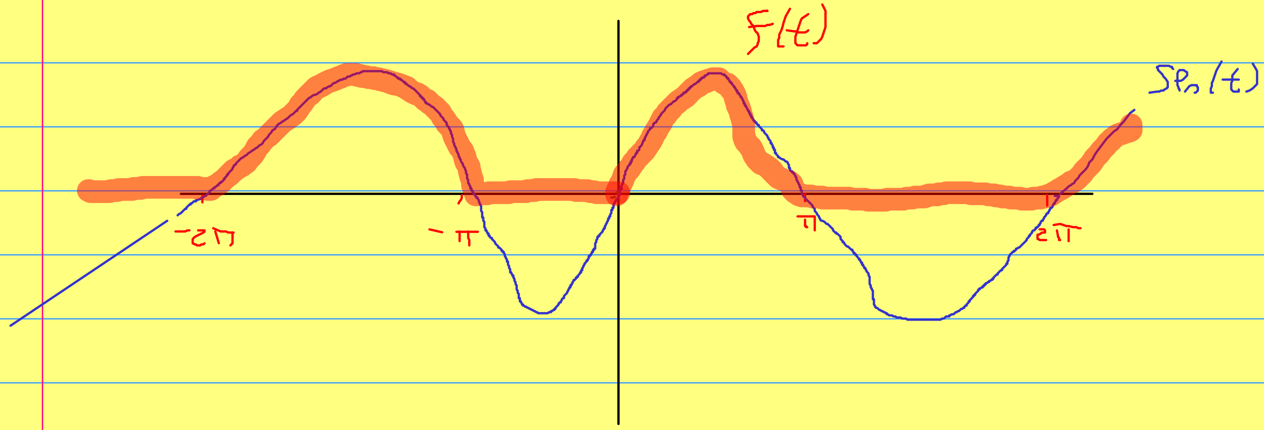
$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-cs}} \int_0^c f(t) e^{-st} dt,$$

para encontrar la transformada de *la onda semi-rectificada* :

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{si } \operatorname{sen} t > 0 \\ 0 & \text{si } \operatorname{sen} t \leq 0 \end{cases}$$

Graficar la onda semi-rectificada en función del tiempo.

Nota: Esta es la forma de una corriente alterna (i.e. sinusoidal) después de pasar por un diodo.



El periodo de la función es $2\pi = c$

6. *a*) Llamando $F(s)$ a la transformada de Laplace de la función $f(t)$, tomar la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial siguiente, y expresarla en función de $F(s)$:

$$2\frac{df}{dt} = 1 \qquad \text{con condición inicial} \quad f(0) = 4.$$

Sugerencia: Usar la parte *b*) del ejercicio 2. Recordar que la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1\ \forall t \geq 0$ coincide con la transformada del escalón de Heaviside $H(t)$.

$$2f' = 1$$

$$\mathcal{L}(2f') = \mathcal{L}(1)$$

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(2f') = 2\,\mathcal{L}(f') \overset{2.b)}{=} 2\left[s\,\underbrace{\boxed{\mathcal{L}(f)(s)}}_{F(s)} - \underbrace{f(0)}_{4}\right]$$

$$2\left[sF(s) - 4\right] = \frac{1}{s}$$

Despejar $F(s)$: $\quad sF(s) - 4 = \frac{1}{2s}$

$$sF(s) = \frac{1}{2s} + 4$$

$$F(s) = \left(\frac{1}{2s} + 4\right) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{2s^2} + \frac{4}{s}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{2}\boxed{\frac{1}{s^2}} + 4 \cdot \boxed{\frac{1}{s}}}$$

$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s) \Rightarrow \boxed{f = g}$

• ¿Cuál es la función $f(t)$ tal que $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s}$?

$\Rightarrow f(t) = H(t) = 1$

• ¿Cuál es la función $g(t)$ tal que $\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s^2}$?

Solución: la función $g(t) = t$

$\mathcal{L}(f) = F(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(t) + 4\,\mathcal{L}(1)$

• $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}t + 4\right) \Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{t}{2} + 4}$

$\begin{cases} 2f' = 1 \\ f(0) = 4 \end{cases}$ | $f' = \frac{1}{2} \rightarrow 2f' = 1$

b) $f'' - 4f' + 3f = 2e^t$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

Nota: En este ejemplo aparece un factor repetido en el cociente; en ese caso, la fracción simple tiene la forma:

$$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{s-b}.$$

1) $\mathcal{L}(f'' - 4f' + 3f) = \mathcal{L}(2e^t)$

Linealidad $\rightarrow$ $\mathcal{L}(f'') - 4\mathcal{L}(f') + 3\mathcal{L}(f) = 2\mathcal{L}(e^t)$

2) $\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - \overbrace{f'(0)}^{0} \rightarrow \mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f)$

$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - \overbrace{f(0)}^{0}$

$s^2\mathcal{L}(f) - 4s\mathcal{L}(f) + 3\mathcal{L}(f) = 2\mathcal{L}(e^t)$

$\mathcal{L}(f)[s^2 - 4s + 3] = 2\mathcal{L}(e^t)$

3) 2. *a)* Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s-\alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e^{\alpha t}$, donde α es cualquier número complejo fijo. Este resultado se llama "propiedad de traslación en frecuencia".

$e^t = \overbrace{H(t)}^{f(t)} e^t$, $F(s) = \frac{1}{s} \rightarrow \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$

$\mathcal{L}(f)[s^2 - 4s + 3] = \frac{2}{s-1}$

$\mathcal{L}(f) = \frac{2}{(s^2-4s+3)(s-1)}$

4) Fracciones simples

$$s^2 - 4s + 3 = 0 \rightarrow s = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1$$

$$\rightarrow 3$$

$$\rightarrow 1$$

$$s^2 - 4s + 3 = (s-1)(s-3)$$

$$G(s) = \frac{2}{(s-1)^2(s-3)} = 2\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-3}\right]$$

$$A(s-1)(s-3) + B(s-3) + C(s-1)^2 = 1$$

$$A(s^2-4s+3) + B(s-3) + C(s^2-2s+1) = 1$$

$$s^2[A+C] + s[-4A+B-2C] + 3A - 3B + C = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} A + C = 0 \rightarrow \boxed{A = -C} \quad \boxed{C = -A} \\ -4A + B - 2C = 0 \\ 3A - 3B + C = 1 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ll} -2A + B = 0 & (i) \\ 2A - 3B = 1 & (ii) \end{array}\right.$$

$$(i) + (ii): \ -2B = 1 \rightarrow \boxed{B = -1/2}$$

$$-2A + B = 0 \rightarrow A = \frac{B}{2} \rightarrow \boxed{A = -1/4}$$

$$\boxed{C = -A = 1/4}$$

$$G(s) = 2\left(\frac{-1/4}{s-1} - \frac{1/2}{(s-1)^2} + \frac{1/4}{s-3}\right)$$

$$\frac{-1/4}{s-1} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1} = -\frac{1}{4}\,\mathcal{L}(e^{t})$$

$$\frac{1/4}{s-3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-3} = \frac{1}{4}\,\mathcal{L}(e^{3t})$$

$$\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\tilde{f}(t) = t$$
$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2} = F(s)$$

a) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s-\alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e^{\alpha t}$, donde α es cualquier número complejo fijo. Este resultado se llama "propiedad de traslación en frecuencia".

$$F(s-1) \rightarrow t\,e^{t} = g(t) \rightarrow \mathcal{L}(g) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}(f) = 2\left[-1/4\,\mathcal{L}(e^{t}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(t e^{t}) + \frac{1}{4}\mathcal{L}(e^{3t})\right]$$

Por linealidad:

$$\boxed{\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(-\frac{1}{2}e^{t} - t e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right)}$$

$$\boxed{f(t) = -\frac{e^{t}}{2} - t e^{t} + \frac{e^{3t}}{2}}$$

1) Aplicar Laplace
2) Escribir todo en función de $\mathcal{L}(f)$
3) Fracciones simples
4) Pensar de donde provienen las fracciones.

8. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} + 3x - y = u(t) \\ \dot{y} - 2y = 2u(t) \end{cases}$$

Hallar la transferencia del sistema con entrada $u(t)$ y salida $x(t)$.

Notas: La transferencia de un sistema lineal se define como el cociente $\frac{X(s)}{U(s)}$ donde $X(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de x y u, respectivamente. Para hallar la transferencia, por convención, las condiciones iniciales han de ser nulas.

$X(s) = \mathcal{L}(x)$

$U(s) = \mathcal{L}(u)$

$$\begin{cases} s\underbrace{\mathcal{L}(x)}_{X(s)} + 3\underbrace{\mathcal{L}(x)}_{X(s)} - \mathcal{L}(y) = \underbrace{\mathcal{L}(u)}_{U(s)} \\ s\mathcal{L}(y) - 2\mathcal{L}(y) = 2\underbrace{\mathcal{L}(u)}_{U(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) + 3X(s) - \mathcal{L}(y) = U(s) \\ s\mathcal{L}(y) - 2\mathcal{L}(y) = 2U(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s)[s+3] - \mathcal{L}(y) = U(s) \\ \mathcal{L}(y)[s-2] = 2U(s) \end{cases}$$

$\hookrightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s-2} U(s)$

$X(s)[s+3] - \frac{2}{s-2}U(s) = U(s)$

$X(s)[s+3] = U(s)\left[1 + \frac{2}{s-2}\right]$

$$\boxed{X(s) = U(s)\left[\frac{1}{s+3} + \frac{2}{(s-2)(s+3)}\right]}$$

$\frac{X(s)}{U(s)}$