$f(t) : \overset{AC}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

16/8

DEFINICIONES: Se recuerda la definición de transformada de Laplace, como integral paramétrica de parámetro complejo s, integrando en la variable real $t \geq 0$:

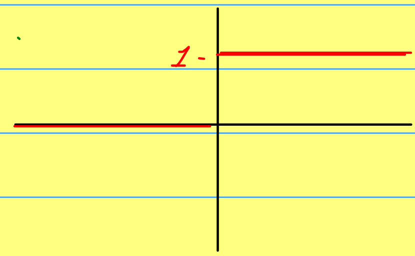
$$F(s) := \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt.$$

Se asume, por convención, que toda función Laplace transformable satisface: $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.

$$\boxed{f(t) = t} \to f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- $H(t)$ denota el "escalón de Heaviside" definido como:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$



$$\mathcal{L}\,H(s) = \int_0^{+\infty} H(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} 1\, e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \int_0^{a} e^{-st}\, dt$$

$u = -st \to du = -s$
$u(0) = 0$
$u(a) = -sa$

$$\mathcal{L}\,H(s) = \lim_{a \to +\infty} -\frac{1}{s} \int_0^{-sa} e^{u}\, du$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{a \to +\infty} e^{u}\Big|_0^{-sa}$$

$$\mathcal{L}\,H(s) = -\frac{1}{s} \lim_{a \to +\infty} \left(e^{-sa} - \overset{1}{e^{0}}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\lim_{a\to+\infty} \overset{0}{e^{-sa}} - \lim_{a\to+\infty} \overset{1}{1}\right] = -\frac{1}{s}\cdot(-1) = \frac{1}{s}$$

$\boxed{\bullet\ Re(s) > 0}$

$$\boxed{\mathcal{L}\,H\,(s) = \frac{1}{s}}$$

2. *a)* Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s-\alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e^{\alpha t}$, donde α es cualquier número complejo fijo. Este resultado se llama "propiedad de traslación en frecuencia".

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$e^{-(s-\alpha)t} = e^{\alpha t}\, e^{-st}$$

$$F(s-\alpha) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(s-\alpha)\,t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \overbrace{f(t)\, e^{\alpha t}}^{g(t)}\, e^{-st}\, dt$$

$F(s-\alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)\,e^{\alpha t}$

• Si $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$

¿ $\mathcal{L}\,e^{\alpha t}(s)$?

Observar : $e^{\alpha t} = H(t)\,e^{\alpha t} \Rightarrow F(s-\alpha) = \mathcal{L}\,He^{\alpha t}\,(s)$

$= \mathcal{L}\,e^{\alpha t}\,(s)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\,e^{\alpha t}\,(s) = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}}$$

b) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s)\cdot e^{-as}$ es la transformada de $f(t-a)$, donde a es un número real fijo, y $f(t)=0$ para todo real $t<0$ y también para todo $t<a$. Este resultado se llama "propiedad de traslación en el tiempo".

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$

Cambio de variable: $h \longmapsto t-a$

$dh = dt$

$h(0) = t(0) - a = -a$

$h(+\infty) = t(+\infty) - a = +\infty$

$f(t)=0 \ \forall t \in [\,?\,a$

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{-a}^{+\infty = h(+\infty)} f(\overbrace{t-a}^{h})\,e^{-s\overbrace{(t-a)}^{h}}\,\overbrace{dt}^{dh} = \int_0^{+\infty} f(t-a)\,e^{-s(t-a)}\,dt$$

$e^{-st}\,e^{as}$

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t-a)\,e^{-st}\,e^{as}\,dt = e^{as}\underbrace{\int_0^{+\infty} f(t-a)\,e^{-st}\,dt}_{\text{Transformada de } f(t-a)}$$

$$F(s) = e^{as}\,\mathcal{L}\,f(t-a)\,(s)$$

$$\boxed{F(s)\,e^{-as} = \mathcal{L}\,f(t-a)\,(s)}$$

- $\mathcal{L}(f+g)\,(s) = \mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(g)\,(s)$
- $\mathcal{L}(\lambda f)\,(s) = \lambda\,\mathcal{L}(f)(s) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

c) Usando las partes $a)$ y $b)$ y la linealidad de la transformada de Laplace, calcular la transformada de:

$$f(t) = H(t)\,\mathrm{senh}(at) = H(t)\,\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}.$$

a) $F(s) = \mathcal{L} f\,(s) \Rightarrow F(s-\alpha) = \mathcal{L}\, f e^{\alpha t}\,(s)$

b) $F(s) = \mathcal{L} f(s) \Rightarrow F(s)e^{-s\alpha} = \mathcal{L}\, f(t-\alpha)\,(s)$

$$\mathcal{L} f(s) = \int_0^{+\infty} H(t)\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{H(t)e^{at}}{2}\,e^{-st} - \frac{H(t)\,e^{-at}}{2}\,e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underbrace{H(t)}_{1} e^{at} e^{-st}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underbrace{H(t)}_{1} e^{-at} e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\boxed{\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\,dt} - \frac{1}{2}\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt}$$

$\mathcal{L}\, e^{at}\,(s) = \frac{1}{s-a}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\, e^{\overset{b}{-a}t}\,(s) = \frac{1}{s-b} = \frac{1}{s-(-a)} = \frac{1}{s+a}$

Sale usando (a)

$$\mathcal{L} H(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\overbrace{s+a - (s-a)}^{2a}}{s^2 + a^2}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(H(t)\,\mathrm{senh}(t)\right)(s) = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

d) Dada una función f, probar que la transformada de Laplace de su derivada $f'(t)$ satisface la identidad:

$$(\mathcal{L}(f'))(s) = s(\mathcal{L}(f))(s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}f'(s) = \int_0^{+\infty} f'(t)\, \underbrace{e^{-st}}_{g(t)}\, dt \qquad \Big| \quad \int_0^{+\infty} f' g = fg\Big|_0^{+\infty} - \int f g'$$

$$g(t) = e^{-st} \Rightarrow g'(t) = -s e^{-st}$$

Aplicamos partes:

$$\mathcal{L}f'(s) = f(t)\, e^{-st}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\left(-s\, e^{-st}\right) dt$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + \underbrace{s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt}_{s(\mathcal{L}f(s))}$$

$\mathcal{L}f(s)$

$$f(t)\, e^{-st}\Big|_0^{+\infty} \text{ "=" } \overbrace{f(+\infty)\, e^{-s(+\infty)}}^{0} - \overbrace{f(0)\, e^{0}}^{-f(0)}$$

$\hookrightarrow$ En las notas: Si podemos calcular $\mathcal{L}f$
$\Rightarrow$ f se porta bien
en infinito

Entonces: $\boxed{\mathcal{L}f'(s) = s(\mathcal{L}f(s)) - f(0)}$

$e)$ Usando las partes $c)$ y $d)$ encontrar la transformada de Laplace de:

$$\frac{1}{a} \cdot (H(t)\,\mathrm{senh}(at))' = H(t)\cosh(at) = H(t)\,\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}.$$

c) $\mathcal{L}\, H(t)\,\mathrm{sen}(at)\ (s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

d) $\mathcal{L}\, f'(s) = s(\mathcal{L}\, f\ (s)) - f(0)$

f) Admitiendo que la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ es derivable como función de variable s, y que al derivar respecto a s la integral impropia que define $F(s)$ es igual a la integral impropia de la función que se obtiene derivando dentro de la integral, deducir que:

$$F'(s) = (\mathcal{L}[-tf(t)])(s)$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(f(t)e^{-st}\right)dt$$

$$\frac{d}{ds}\left(f(t)e^{-st}\right) = \underbrace{\left(\frac{d}{ds}f(t)\right)}_{=0} e^{-st} + f(t)\left(\frac{d}{ds}e^{-st}\right)$$

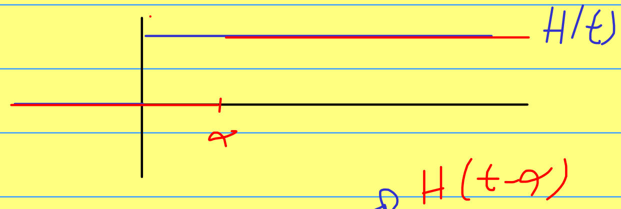
$$= -t f(t) e^{-st}$$

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(f(t)e^{-st}\right)dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} -t f(t) e^{-st}\,dt}_{\mathcal{L}(-tf(t))(s)}$$

$$\boxed{F'(s) = \mathcal{L}(-tf(t))(s)}$$

$$H(\overset{x}{\overline{t-\alpha}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-\alpha \geq 0 \\ 0 & \text{si } t-\alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \alpha \\ 0 & \text{si } t < \alpha \end{cases}$$

3. xi) (xi) $H(t-\alpha)$ para $\alpha > 0$ constante.



b) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $\boxed{F(s) \cdot e^{-as}}$ es la transformada de $f(t-a)$, donde a es un número real fijo , y $f(t) = 0$ para todo real $t < 0$ y también para todo $t < a$. Este resultado se llama "propiedad de traslación en el tiempo".

Si $f(t) = H(t) \rightarrow F(s) = \dfrac{1}{s}$.

Entonces $$\boxed{\mathcal{L}\, H(t-\alpha)\,(s) = \frac{e^{-\alpha s}}{s}}$$

xii) (xii) $P_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\epsilon}(H(t) - H(t-\epsilon))$ (para $\epsilon > 0$ muy pequeño).

$$\mathcal{L}\, P_\varepsilon(t)\,(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\varepsilon}\left[H(t) - H(t-\varepsilon)\right]\right)(s)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathcal{L}\, H(t)\,(s) - \mathcal{L}\, H(t-\varepsilon)\,(s)\right].$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-\varepsilon s}}{s}\right]$$

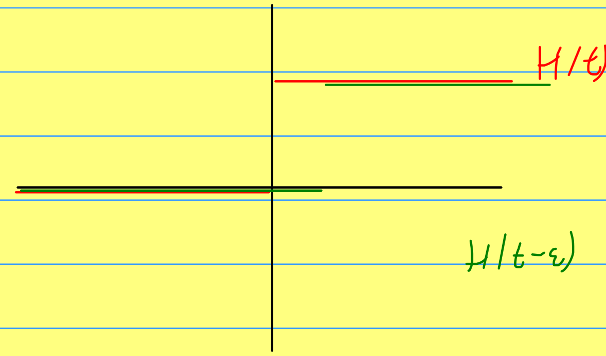
$$= \frac{1}{\varepsilon s}\left[1 - e^{-\varepsilon s}\right]$$

4. *a*) Graficar la función $P_\epsilon(t)$ del ejercicio anterior, parte (xii), con $\epsilon = 1/10^6$.

Esa función se llama "pulso" de duración ϵ y altura $1/\epsilon$. Su límite cuando $\epsilon \to 0^+$ no existe como función, ya que sería un pulso de duración nula y altura infinita. Aunque no exista como función se llama "Distribución Delta de Dirac", y se denota así:

$$\delta(t) = \text{“} \lim_{\epsilon \to 0^+} \text{”}\ P_\epsilon(t).$$

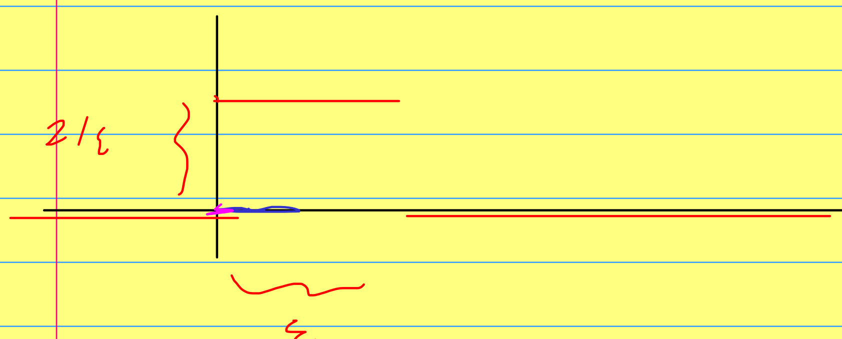
$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



$$H(t-\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } t < \varepsilon \end{cases}$$

$$H(t) - H(t-\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\left(H(t) - H(t-\varepsilon)\right) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



b) Se define la transformada de Laplace de la Delta de Dirac como el límite (este sí existe) siguiente:

$$(\mathcal{L}\delta)(p) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (\mathcal{L}(P_\epsilon(t))(p)$$

Hallar la transformada de Laplace de la Delta de Dirac y agregarla a la tabla del ejercicio anterior.

$$\mathcal{L}\left(P_\varepsilon(t)\right)(s) = \frac{1}{\varepsilon s}\left[1 - e^{-\varepsilon s}\right]$$

$$\mathcal{L} f(s) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

L´Hôpital: $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\cancel{s}\, e^{-\varepsilon s}}{\cancel{s}} = 1$

Entonces $\boxed{\mathcal{L} f(s) = 1}$