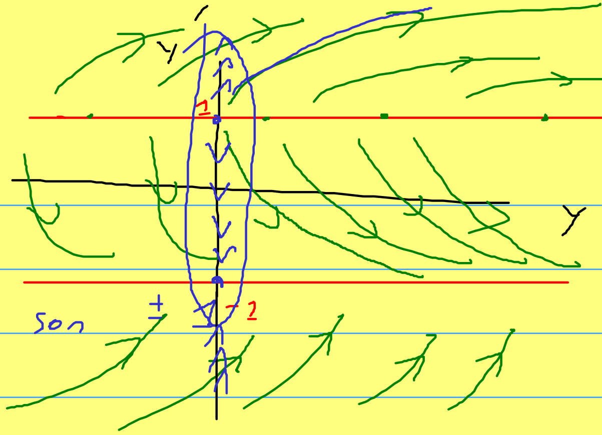
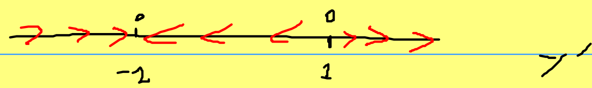
11/8



3 c) $y' = y^2 - 1.$

1°) Las raices son ± 1



8. d) $-2y' = xy^3 + y$ con $\boxed{y(1) = 0.}$

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

$z = y^{1-n}$ → Siempre suponemos que $x \neq 0$

1) $-2y' = xy^3 + y \iff y' + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{P(x)} y = \underbrace{-\tfrac{1}{2}x}_{Q(x)} y^3$

2) $z' + P(x)(1-n)z = Q(x)(1-n) \Big|_{n=3}$

$z' - 2\left(\frac{1}{2}\right)z = -2\left(-\frac{1}{2}x\right)$

$z' + z = x$ ⟼ Ecuación lineal de orden 1

- $z(x) = z_H(x) + z_p(x)$

- $z' + z = 0$ → $z' = -z$ → $\boxed{z(x) = Ae^{-x}}$

$\displaystyle\int \frac{z'}{z}dx = \int -1\, dx$

$\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int -1\, dx$ → $\displaystyle\int 1\, dx = -x + K$

$$\int \frac{1}{z}\, dz = \ln(|z(x)|)$$

$$\ln(|z(x)|) = -x + K$$

$$|z_H(x)| = e^{-x+K} = e^{-x} \cdot \overset{A}{e^{K}}$$

$$\boxed{|z_H(x)| = A\, e^{-x}}$$

• z_p: $z' + z = x$

Si $z = x + a \Rightarrow z' = 1 \Rightarrow z' + z = x \underbrace{+a+1}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \overset{\text{queremos}}{=} x$

$0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$$z_p(x) = x - 1$$

Entonces $z(x) = \overbrace{Ae^{-x}}^{z_H} \overbrace{+ x - 1}^{z_p}$

• $z = y^{-2} \Rightarrow \dfrac{1}{y^2(x)} = Ae^{-x} + x - 1$

$$\frac{1}{Ae^{-x} + x - 1} = y^2(x)$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{Ae^{-x} + x - 1}} = y(x)$$

↳ La conocemos usando $y(1) = 0$

Obs: i) Todo esto sirve para el (e).

ii) En el caso (d) como $y(1) = 0$ no podemos hacer el cambio de variable $\frac{1}{y^2(x)}$

Lo que podemos hacer es probar si

$$y(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

es solución o no

$$\underbrace{y'}_{=0} + P(x)\underbrace{y}_{=0} = Q(x)\underbrace{y^n}_{=0}$$

Si $y(x)=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow 0+P(x)0 = Q(x)0^n$

$$0=0 \quad ✓$$

e) $$\pm\frac{1}{\sqrt{Ae^{-x}+x-1}} = y(x)$$

↳ La conocemos usando [redacted]

$$y(1)=-1<0$$

Como la condición inicial es negativa, nos quedamos con

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{Ae^{-x}+x-1}}$$

$$\underbrace{y(1)}_{=-1} = -\frac{1}{\sqrt{Ae^{-1}+\underbrace{1-1}_{=0}}} = -\frac{1}{\sqrt{Ae^{-1}}}$$

$$-1 = -\frac{1}{\sqrt{Ae^{-1}}}$$

si y sólo si $\sqrt{Ae^{-1}}=1 \rightarrow \boxed{A=e}$

La solución a $\begin{cases} -2y' = xy^3 + y \\ y(1) = -1 \end{cases}$ es

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{\sqrt{e^{-x+1} + x - 1}}}$$

---

9. Una extensión natural de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' = p(x) + q(x)y$ es la ecuación de Riccati

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

En general, esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales. No obstante, si se conoce una solución particular $y_1(x)$, la solución general tiene la forma

$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$

donde $z(x)$ es la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$z' - (q + 2ry_1)z = rz^2.$$

a) Demostrar esto último.

$$y_1' = p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2$$

$$z' - (q(x) + 2r(x)y_1)z = r(x)z^2$$

Sea $y(x) = y_1(x) + z(x)$, entonces

$$y' = y_1' + z' =$$

$$= p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2 + (q(x) + 2r(x)y_1)z + r(x)z^2$$

$$= p(x) + q(x)(\underbrace{y_1 + z}_{y(x)}) + r(x)(\underbrace{y_1^2 + 2y_1z + z^2}_{(y_1+z)^2 = y^2(x)})$$

Queremos ver

$$= p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

$y' - y^2 + 2y = -x^4 + 2x + 1$

9) c) Resolver la ecuación $y' = y^2 - 2y - x^4 + 2x + 1$ sabiendo que admite una solución polinomial.

(1º - Encontrar solución particular)

$y(x) = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$y^2 = (ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + c)$

$= a^2x^4 + 2abx^3 + 2acx^2 + b^2x^2 + 2bxc + c^2$

$= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2$

$y' - y^2 + 2y =$

$= 2ax + b - (a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2)$

$+ 2(ax^2 + bx + c)$

$= -x^4 + 2x + 1$

$$\begin{cases} -a^2 = -1 \rightarrow \boxed{a = \pm 1} \\ -2ab = 0 \rightarrow b = 0 \\ -(2ac + \cancel{b^2}) + 2a = 0 \\ 2a - \cancel{2bc} + \cancel{2b} = 2 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow \boxed{a = 1} \\ b - c^2 + 2c = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow -2ac + 2a = 0$

$2a[-c + 1] = 0 \; \{ -c + 1 = 0 \rightarrow \boxed{c = 1}$

$a \neq 0$

$\rightarrow -(1)^2 + 2(1) = 1$ ✓

$-1 + 2 = 2$

$3x^2+6x+c$

Entonces $\boxed{y_1(x) = x^2 + 1}$

2° Encontrar $z(x)$)

$$y' = y^2 - 2y - x^4 + 2x + 1$$

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

$$z' - (q + 2ry_1)z = rz^2.$$

$$y' = \overbrace{-x^4 + 2x + 1}^{P(x)} \overbrace{-2}^{q(x)} y + \overbrace{1}^{r(x)} y^2$$

Queremos encontrar $z(x)$ solución de

$$z' - (-2 + 2x^2 + 2)z = z^2$$

$$z' + \overbrace{(-2x^2)}^{P(x)} z = \overbrace{1}^{Q(x)} z^2 \rightarrow \text{Bernoulli}$$

Cambio de variable: $w = z^{1-2} = z^{-1} = \frac{1}{z}$

$$w' = -z^{-2} z' \Rightarrow z' = -w'z^2$$

$$-w'z^2 - 2x^2 z = z^2 \qquad \Big| \; z^2 \neq 0$$

$$-w' - 2x^2 \overbrace{z^{-1}}^{w} = 1$$

$$\boxed{w' + 2x^2 w = -1}$$

$\bullet$ $\underline{w_H}$: Solución a $w' + 2x^2 w = 0$

$$w' = -2x^2 w$$

$$\int \frac{w'}{w} dx = -2\int x^2 \, dx \qquad (w'\,dx = dw)$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{w} dw}_{\ln(|w(x)|)} = \underbrace{-2\int x^2 \, dx}_{-2\left(\frac{x^3}{3} + \tilde{K}\right)}$$

$$-2\left(\frac{x^3}{3} + \tilde{K}\right) = -\frac{2}{3}x^3 \overbrace{-2\tilde{K}}^{K}$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + K$$

$$|w_H(x)| = \underset{e^K}{A}\, e^{-\frac{2}{3}x^3}$$

$\bullet$ w_p: Es solución de $w' - 2x^2 w = -1$

Variación de constante: $w(x) = K(x)\, w_H(x) = K(x) A\, e^{-\frac{2}{3}x^3}$

$$w' = A\left(K' e^{-\frac{2}{3}x^3} - K\, 2x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3}\right)$$

$$A\Big[K' e^{-\frac{2}{3}x^3} \underbrace{- K\, 2x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} - 2x^2 K e^{-\frac{2}{3}x^3}}_{\text{se cancela:}}\Big] = -1$$

$$K'(x) = -\frac{1}{A} e^{\frac{2}{3}x^3} \rightarrow \text{Integrando encontramos } K$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int e^{\frac{2}{3}x^3}\,dx \quad \longmapsto \text{ Hairy problems}$$