9/8

b) $y' = \dfrac{y - xy^2}{x + x^2 y}.$ $\quad | \; n \in \mathbb{R}$

$$z = \frac{y}{x^n} \to y = z x^n$$

$$y' = z' x^n + n z x^{n-1}$$

$$z' x^n + n z x^{n-1} = \frac{z x^n - x (z x^n)^2}{x + x^2 (z x^n)} \quad = z^2 x^{2n+1}$$

$$[z' x + n z] \cancel{x^{n-1}} = \frac{\cancel{x^{n-1}} (z x - z^2 x^{n+2})}{x + z x^{n+2}}$$

$$z' x + n z = \frac{z x - z^2 x^{n+2}}{x + z x^{n+2}}$$

$$z' x = \frac{z x - z^2 x^{n+2}}{x + z x^{n+2}} - n z$$

$$= \frac{z x - z^2 x^{n+2} - n z x - n z^2 x^{n+2}}{x + z x^{n+2}}$$

$$= \frac{z x [1 - n] - z^2 x^{n+2} [1 + n]}{x + z x^{n+2}}$$

$$z' = \frac{z x [\overset{2}{1 - n}] - z^2 x^{\overset{1}{n+2}} [\overset{0}{1 + n}]}{x^2 + z x^{\overset{2}{n+3}}}$$

$\underline{\text{Si } n=-1:}$ $\quad 1-n=2$

$1+n=0$

$n+2=1$

$n+3=2$

$$z' = \frac{z\,z\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}+z\,x^{\cancel{2}}} = \frac{z}{\cancel{x}} \quad \frac{z}{1+z}$$

$$\text{b) } y' = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}.$$

$$y' = z'x^n + n\,z\,x^{n-1}$$

$$(z'x^n + n z x^{n-1}).(x + x^2 y) = y - xy^2$$

$$z'x^{n+1} + n z x^n + z' x^{n+2} y + n y z x^{n+1} = y - xy^2 \qquad z = \frac{y}{x^n}$$

$$z'x^{n+1}\left[\underline{1 +} xy\right] + n z x^n \left[\underline{1 + y}x\right] = y - xy^2 = y\left[1 - xy\right]$$

$$\text{Si } z = \frac{y}{x^n} \to y = z x^n$$

$$\left[1 + z x^{\overset{0}{n+1}}\right]\left(z' x^{\overset{0}{n+1}} + n z x^n\right) = z x^n \left[1 - z x^{\overset{0}{n+1}}\right]$$

$\underline{\text{Si } n=-1:}$

$$(1+z)\left(z' - \frac{1.z}{z}x^{-1}\right) = z x^{-1}\left[1 - z\right]$$

$$z' - z x^{-1} = z x^{-1} \frac{[1-z]}{1+z}$$

$$z' = \frac{z}{x}\left[\frac{1-z}{1+z} + 1\right]$$

$$z' = \frac{z}{x}\left[\frac{1 - \cancel{z} + 1 + \cancel{z}}{1+z}\right]$$

$$\boxed{z' = \frac{z}{x}\,\frac{z}{1+z} = \frac{z}{x}\cdot\frac{z}{1+z}}$$

Ahora variable separables.

$$\int z'\cdot\frac{1+z}{z}\,dx = \int \frac{z}{x}\,dx$$

dz

- $$2\int \frac{1}{x}\,dx = 2\ln(|x|) + K$$

- $$\int \frac{1+z}{z}\,dz = \int\left(\frac{1}{z} + 1\right)dz$$

$$= \int \frac{1}{z}\,dz + \int 1\,dz$$

$$= \ln(|z|) + z$$

$$\boxed{\ln(|z|) + z = \ln(|x|) + K}$$

$z = xy \rightarrow \ln(|yx|) + yx = \ln(|x|) + K$

Obs: Se deja así por que no se puede despejar.

Dada una ecuación diferencial de la forma

$$y' = p(x) + f(x)\,y$$

La solución la podemos encontrar así:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

donde $y_H(x)$ es solución de $y' = f(x)\,y$

Observar que $y' = f(x)\,y$ es de variables separables.

Por otro lado, $y_p(x)$ es una solución de la ecuación:

$$y'(x) = p(x) + f(x)\,y$$

Ej: $y' = \overset{p(x)}{x} + \overset{f(x)}{x}\,y$

• y_H: Hallar solución de $y' = x\,y$

$$\frac{y'}{y} = x \to \int \frac{\overset{dy}{y'\,dx}}{y} = \int x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \to \ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + k$$

$\tilde{K} = e^{k}$

$$y = \tilde{K} e^{\frac{x^2}{2}} \to y_H(x) = \tilde{K}\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

• y_p: $y' - x\,y = x$

Buscamos una función $y(x)$ que cumpla $y' - x\,y = x^2$

Si $y(x) = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$\rightarrow 2ax + b - x(ax^2 + bx + c) = x$

$$\begin{cases} -a = 0 \\ -b = 0 \\ 2a - c = 1 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{c = -1}$$

$y_p(x) = -1$

La solución general es:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = Ke^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

Para el ejercicio 7 la idea es usar esto:

i) Probar que $\boxed{z = C(\phi_1 - \phi_2)}$ es solución de la ecuación homogénea $z' = f(x)\, z$

ii) Encontrar una solución particular Γ que involucre ϕ_1 y ϕ_2.

iii) $\phi = z + \Gamma \quad \left[= \phi_1 + C(\phi_2 - \phi_1) \right]$

8. La ecuación

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

que se conoce como ecuación de Bernoulli, es lineal para $n = 0$ y $n = 1$. Probar que utilizando el cambio de variable $z = y^{1-n}$ se puede reducir a una ecuación lineal, cualquiera sea n, y aplicar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

$$z = y^{1-n} \rightarrow z' = (1-n)\, y^{-n}\, y' \rightarrow y' = z' \frac{y^n}{1-n}$$

$$z' \frac{y^n}{1-n} + P(x) y = Q(x) y^n$$

• Si $y \neq 0$, multiplicamos por $\frac{1}{y^n}$:

$$y^{1-n} = z$$

$$\frac{z'}{1-n} + P(x) \cdot \frac{y}{y^n} = Q(x) \rightarrow z' + \underbrace{P(x)(1-n)}_{\tilde{P}(x)} z = \underbrace{Q(x)(1-n)}_{\tilde{Q}(x)}$$

$$\boxed{z' + \tilde{P}(x)\, z = \tilde{Q}(x)}$$

a) $xy' + y = x^4 y^3$. $\rightarrow z = y^{1-n} = y^{-2}$

Si $x \neq 0$: $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{x^3}_{Q(x)} y^3$

$$z' \underbrace{- \frac{2}{x}}_{\tilde{P}(x)} z = \underbrace{-2x^3}_{\tilde{Q}(x)}$$

• $z(x) = K e^{-\int \tilde{P}(x)\,dx} + e^{-\int \tilde{P}(x)\,dx} \int \tilde{Q}(x)\, e^{\int \tilde{P}(x)\,dx}\, dx$

Hacer la cuenta

Obs: Una vez que hallamos la solución, volvemos a escribir todo con la variable original.

a) $xy' + y = x^4y^3$.

Nos queda ver, que pasa si $x=0$.

$0y' + y = 0y^3 \to y = 0 \to \boxed{y(x) = 0}$

Ecuaciones diferenciales de orden con coeficientes constantes.

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

La solución es $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

¿Cómo hallar la homogénea?

Definimos el polinomio característico como

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

- i) Dos raíces reales distintas α y β
- ii) Una raíz doble real α
- iii) Dos raíces complejas conjugadas $\alpha \pm i\beta$

i) $x_H(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$

ii) $x_H(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$

iii) $x_H(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)$

Exponencial complejo

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(1) = e^2$ e $y'(1) = 3e^2$.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 = \alpha \\ 2 = \beta \end{cases}$$

La solución es $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

- $\underset{e^2}{y(1)} = C_1 e^3 + C_2 e^2 \rightarrow \boxed{C_1 e^3 + C_2 e^2 = e^2}$

- $y'(x) = 3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x}$

$$\underset{3e^2}{y'(1)} = 3C_1 e^3 + 2C_2 e^2 \rightarrow \boxed{3C_1 e^3 + 2C_2 e^2 = 3e^2}$$

$$\begin{cases} C_1 e^3 + C_2 e^2 = e^2 & (i) \\ 3C_1 e^3 + 2C_2 e^2 = 3e^2 & (ii) \end{cases}$$

$$3(C_1 e^3 + C_2 e^2) = 3e^2 \qquad 3C_1 e^3 = 3e^2 \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{e}}$$

$$3C_1 e^3 + \boxed{3C_2 e^2} = 3e^2$$
$$3C_1 e^3 + \boxed{2C_2 e^2} = 3e^2$$

$$3C_2 = 2C_2 \rightarrow 3C_2 - 2C_2 = 0$$
$$\boxed{C_2 = 0}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{e}e^{3x}} = e^{3x-1}$$