25/10

Práctico 6

Def: $\{f_n\}$, $f_n : M \to \mathbb{R}^m$ decimos que f_n converge puntualmente a una función $f: M \to \mathbb{R}^m$ si:

$\forall x_0 \in M$ fijo se cumple $\underbrace{\lim_n \| f_n(x_0) - f(x_0) \| = 0}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0(\varepsilon)$ tal que

$\| f_n(x_0) - f(x_0) \| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon, x_0)$; x_0 fijo !

$f(x) = 0\ \forall x$

Ej: $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$. Fijo $x_0 \in M$, $\lim_n | f_n(x_0) - 0 |$

$M = [0, 1]$

$$\lim_n \left| \frac{x_0}{n} \right| = \lim_n \frac{|x_0|}{n} = 0$$

· Notación: $f_n \to f$, $f_n \xrightarrow{c.p.} f$

Obs: La convergencia depende del dominio.

Ej: $f_n(x) = x^n$; $x_0 \in M$ fijo, $\lim_n | f_n(x_0) - 0 | = \lim_n x_0^n = 0$

$M = [0, 1/2]$

Si $M = [0, 1/2]$, $f_n \xrightarrow{c.p} 0$

$M = [-1, 1/2]$. $x_0 \in (-1, \frac{1}{2}]$, $x_0^n \to 0$

$\underline{x_0 = -1}$. $\lim_n \left| -1^n - f(-1) \right| = 0$

¿ $(-1)^n$ converge? $\rightarrow$ Oscila, es decir $\nexists$ límite.

En $M = [-1, 1/2]$ f_n no converge a nada.

- Encontrar $y_0 = f(-1)$: $\lim_n |(-1)^n - y_0| = 0$

No se puede

Def: $\{f_n\}$, $f_n : M \to \mathbb{R}^m$ decimos que f_n converge puntualmente a una función $f: M \to \mathbb{R}^m$ si: $\forall x_0 \in M$ fijo se cumple $\lim_n || f_n(x_0) - f(x_0) || = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$ tal que

$|| f_n(x_0) - f(x_0) || < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon, x_0)$; x_0 fijo !

Def: $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$ tq

$$|| f_n(x) - f(x) || < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall x \in M$$

Notación: $f_n \rightrightarrows f$, $f_n \xrightarrow{c.u.} f$

Prop: Convergencia uniforme implica puntual.

Prop: Si $\lim_n \sup_{x \in M} || f_n(x) - f(x) || = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{c.u.} f$

Ej: $f_n(x) = x^n$
$M = [0,1]$

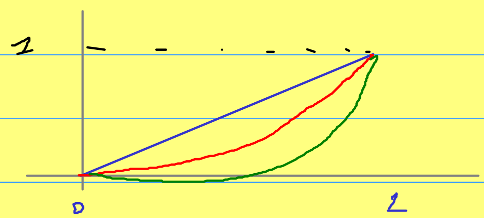
. Si $x_0 \in [0,1) \Rightarrow x_0^n \longrightarrow 0$

. Si $x_0 = 1$, $f_n(x_0) = 1^n = 1 \xrightarrow[n]{} 1$

$$f_n(x) \xrightarrow{c.p.} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- $\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in M} |x^n - 0| = \sup_{x \in M} x^n = 1$

Las f_n son crecientes.



$\lim_n \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = \lim_n 1 = 1 \neq 0$

- Prop: $\left.\begin{array}{l} \{f_n\} \text{ son continuas} \\ f_n \xrightarrow{c.u.} f \end{array}\right\}$ f es continua

Usando esto $\underset{x \in [0,1]}{x^n} \not\xrightarrow{c.u.} f$, pues si no

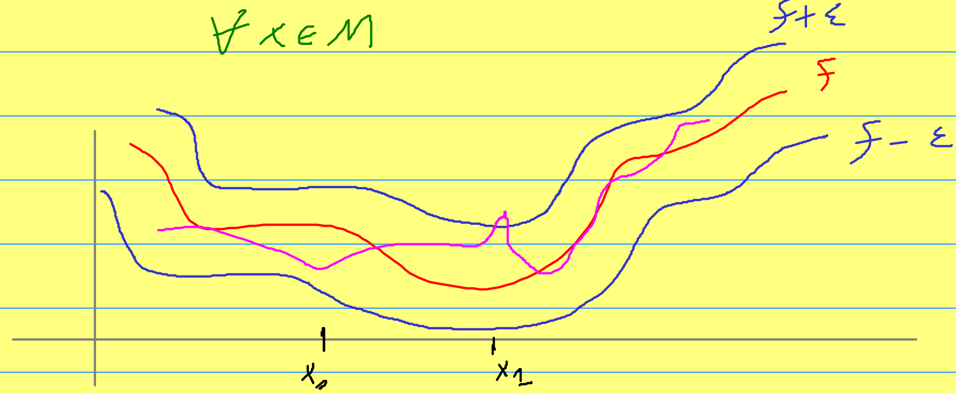
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sería continua.

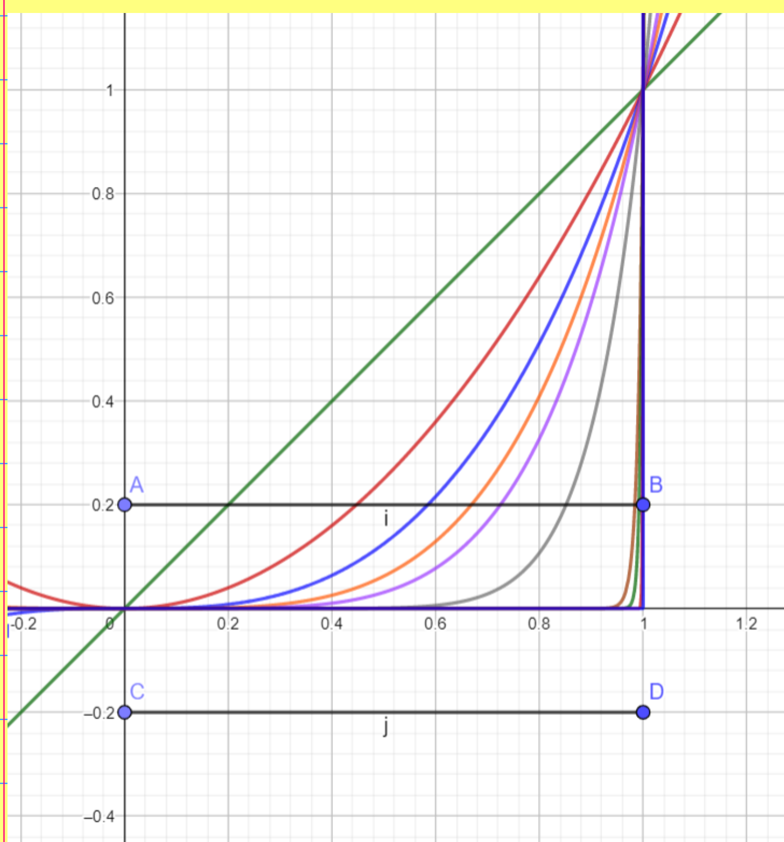
Interpretación geométrica de $f_n \xrightarrow{c.u.} f$.

$f_n \xrightarrow{c.u.} f$ si: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0(\varepsilon)$ t.q. $\underline{\|f_n(x) - f(x)\|} < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0(\varepsilon)$

$\forall x \in M$





1\. c) $h_n(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.

• ¿$f_n \xrightarrow{c.p.} 0$?

$x_0 \in (0,1)$ fijo: $\lim_n f_n(x_0) = \lim_n \dfrac{x_0}{nx_0+1} = 0$ ✓

• ¿$f_n \xrightarrow{c.u.} 0$?

¿$\lim_n \boxed{\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - 0|} = 0$?

$\sup_{x\in(0,1)} \dfrac{x}{nx+1} = \dfrac{1}{n\cdot 1+1} = \dfrac{1}{n+1}$

• $f_n'(x) = \dfrac{1(\cancel{n}x+1) - \cancel{x(n)}}{(nx+1)^2} = \dfrac{1}{(nx+1)^2} > 0 \Rightarrow f$ es creciente

$n \geq 1$

$x \in (0,1)$

$\lim_n \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - 0| = \lim_n \dfrac{1}{n+1} = 0$

Entonces $f_n \xrightarrow{c.u.} 0$

1. a) $f_n(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$.

- ¿ $f_n \xrightarrow{c.p.} 0$?

$x_0 \in \mathbb{R}$ fijo: ¿ $\lim_n \dfrac{\text{sen}(x_0)}{n} = 0$? ✓

- ¿ $f_n \xrightarrow{c.u.} 0$?

¿ $\lim_n \boxed{\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - 0 \right|} = 0$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\text{sen}(x)}{n} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\overbrace{|\text{sen}(x)|}^{1}}{n} = \frac{1}{n}$$

$\lim_n \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ c.u. a 0.

4. Consideremos la sucesión de funciones en $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

a) Calcular el límite puntual de las sucesiones f_n y f_n', a los que llamamos f y g respectivamente.

b) Probar que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

• ¿ $f_n \xrightarrow{c.p.} 0$?

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ está fijo: $\lim_n \left| \frac{x_0}{1+nx_0^2} \right| = \lim_n \frac{|x_0|}{1+nx_0^2} \longrightarrow 0$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{1(1+nx^2) - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

$$\boxed{f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}}$$

• Si $x=0 \Rightarrow f_n'(0) = 1 \quad \forall n \Rightarrow f_n'(0) \longrightarrow 1$

• Si $x_0 \neq 0$: $f_n'(x_0) = \frac{1-nx_0^2}{1+2nx_0^2+n^2x_0^4} \approx \lim_n \frac{-\cancel{n}x_0^2}{n^{\cancel{2}}x_0^4} \xrightarrow[n]{} 0$

$$f_n'(x) \xrightarrow{c.p.} g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Obs: $f_n' \not\xrightarrow{c.u.} g$.

$$f_n(x) \xrightarrow{c.p.} f(x) = 0$$

Derivar

$$f_n'(x) \xrightarrow{c.p.} g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

No es deriv. g.

Es decir: $\left(\lim_n f_n(x)\right)' \neq \lim_n f_n'(x)$

Obs: Si $f_n \xrightarrow{c.u.} f \Rightarrow \left(\lim_n f_n(x)\right)' = \lim_n f_n'(x)$

¿Vale el recíproco?

5. Sea la sucesión $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ para $x \in [0,1]$.

a) Determinar el límite puntual.

b) Comparar $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ y $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

c) Calcular el supremo de $f_n(x)$ para $x \in [0,1]$.

a) $x_0 \in [0,1]$ fijo : $\lim_n \dfrac{2^n x_0}{1+n2^n x_0^2} \simeq \lim_n \dfrac{2^n x_0}{n2^n x_0^2} = \lim_n \dfrac{1}{n x_0} \to 0$

$x_0 \neq 0$

$x_0 = 0 \qquad f_n(0) = \dfrac{2^n 0}{1+n2^n 0^2} = 0$

$f_n \xrightarrow{C.P.} 0$

b) Comparar $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ y $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

$$\int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

$$\int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \frac{1}{2n}\int_1^{1+n2^n} \frac{du}{u} = \frac{1}{2n}\left[\ln(1+n2^n) - \ln(1)\right]$$

$$\ln(1) = 0$$

$u = 1+n2^n x^2 \to du = n2^{n+1}x\,dx$

$$n2^{n+1}x = 2n\,(2^n x)$$

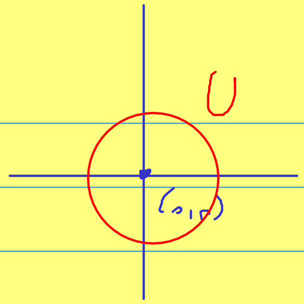
$$\int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \frac{\ln(1+n2^n)}{2n}$$

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_n \frac{\ln(1+n2^n)}{2n} \neq 0$$

Verificar.

$$\lim_n \int f_n(x)\,dx \neq \int \lim_n f_n(x)\,dx$$

<u>Obs</u>: Si $f_n \xrightarrow{c.u.} f \Rightarrow \lim_n \int f_n(x)\,dx = \int \lim_n f_n(x)\,dx$



$V : U \to \mathbb{R}$

i) $(0,0)$ es un mínimo estricto en U

ii) $\dot{V} \leq 0 \quad \forall (x,y) \in U$