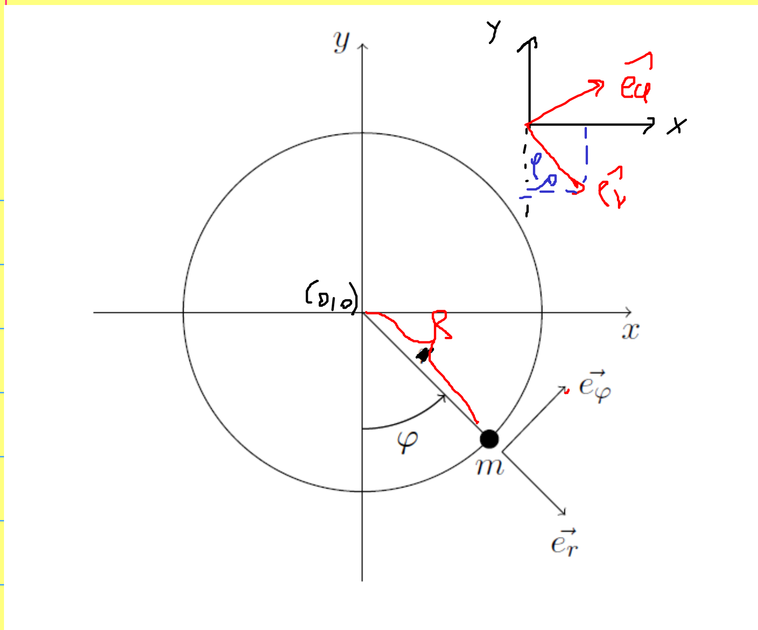
20/10



$F = m\ddot{r}$

$e_r = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$

$e_\varphi = (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$

R es cte

$r(t) = R\, e_r$

$\dot{r} = \cancel{\dot{R}}_{0}\, e_r + R\, \dot{e}_r$, $e_r = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) \rightarrow \dot{e}_r = (-\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi}, \cos\varphi\,\dot{\varphi})$

$= \dot{\varphi}(-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$

$= \dot{\varphi}\, e_\varphi$

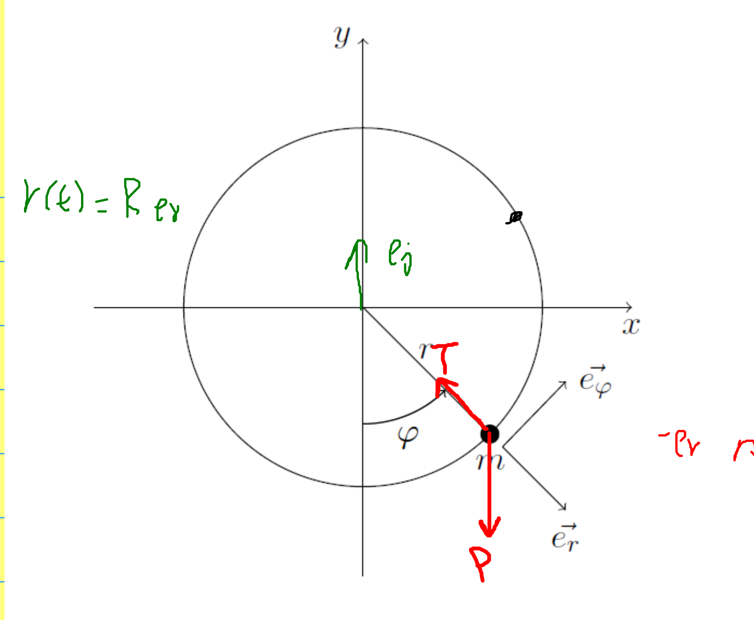
$\dot{r} = R\dot{\varphi}\, e_\varphi$

$\ddot{r} = \cancel{\dot{R}}_{0}\,\dot{\varphi}\, e_\varphi + R\,\ddot{\varphi}\, e_\varphi + R\dot{\varphi}\,\dot{e}_\varphi$

$e_\varphi = (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi) \rightarrow \dot{e}_\varphi = \dot{\varphi}\overbrace{(-\cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi)}^{-e_r}$

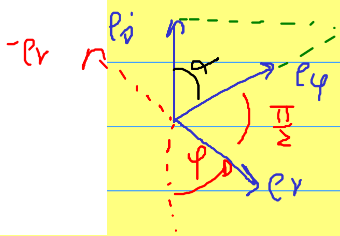
$\dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\, e_r$

$$\boxed{\ddot{r} = -R\dot{\varphi}^2 e_r + R\ddot{\varphi}\, e_\varphi}$$



$$F = -T\,e_r - P\,e_j$$

$$\ddot{r} = -R\,\dot{\varphi}^2 e_r + R\,\ddot{\varphi}\,e_\varphi$$



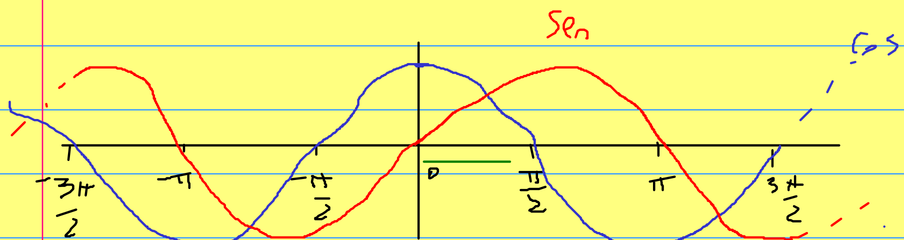
$e_j =$

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$e_j = \cos\alpha\, e_\varphi - \operatorname{sen}\alpha\, e_r$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi \;\therefore\; \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \operatorname{sen}\varphi$$

$$\operatorname{sen}\alpha = + \cos\varphi$$



$$e_j = +\operatorname{sen}\varphi\, e_\varphi - \cos\varphi\, e_r$$

Para ángulos complementarios:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x)$$

$$P = mg \Rightarrow F = -T\,e_r - mg\,e_j = -T\,e_r - mg\left(\operatorname{sen}\varphi\, e_\varphi - \cos\varphi\, e_r\right)$$

$$\boxed{F = (\cos\varphi - T)\,e_r - mg\operatorname{sen}\varphi\, e_\varphi}$$

$$\underbrace{(\cos\varphi - T)\,e_r - mg\operatorname{sen}\varphi\, e_\varphi}_{F} = \underbrace{-mR\dot{\varphi}^2 e_r + mR\ddot{\varphi}\, e_\varphi}_{m\ddot{r}}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi - T = -mR\dot{\varphi}^2 \rightarrow \text{Trivial} \\ -mg\operatorname{sen}\varphi = mR\ddot{\varphi} \rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\dfrac{g}{R}\operatorname{sen}\varphi} \end{cases}$$

porque no hay movimiento según e_r

$b)$ Llamemos $k = \sqrt{\frac{g}{r}}$. Introduciendo una nueva variable $\theta = \dot{\varphi}/k$, transformar la ecuación anterior en la ecuación matricial:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = k\theta \\ \dot{\theta} = -k \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi} = -k^2 \operatorname{sen} \varphi \quad , \qquad \theta = \frac{\dot{\varphi}}{k} \rightarrow \dot{\varphi} = k\theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{\ddot{\varphi}}{k} = -\frac{k^{\cancel{2}} \operatorname{sen} \varphi}{\cancel{k}} = -k \operatorname{sen} \varphi \rightarrow \dot{\theta} = -k \operatorname{sen} \varphi$$

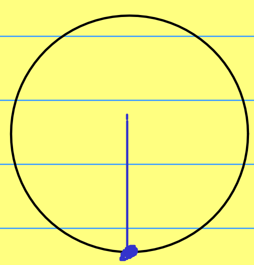
$$k \neq 0 \quad , \quad k = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$c)$ Hallar los puntos críticos de la ecuación matricial.

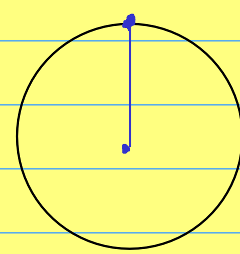
$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad X = (\varphi, \theta) \\ f(\varphi, \theta) = (k\theta, -k \operatorname{sen} \varphi) \end{array}\right\} \dot{X} = f(\varphi, \theta)$$

Puntos críticos: $f(\varphi, \theta) = (0, 0)$

$$\begin{cases} k\theta = 0 \longrightarrow \boxed{\theta = 0} \\ -k \operatorname{sen} \varphi = 0 \longrightarrow \operatorname{sen} \varphi = 0 \rightarrow \boxed{\varphi = n\pi} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$



n par



n impar

d) Linealizar la ecuación matricial alrededor de los puntos críticos. ¿Se puede decir algo sobre la estabilidad de los mismos?

$$\dot{x} = f(\varphi,\theta) = (\overbrace{K\theta}^{F_1}, \overbrace{-K \operatorname{sen} \varphi}^{F_2})$$

$$df(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Puntos críticos $(n\pi, 0)$ $n \in \mathbb{N}$

<u>n par</u>: $\cos(n\pi) = 1 \rightarrow \underset{n \text{ par}}{df(n\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix}$

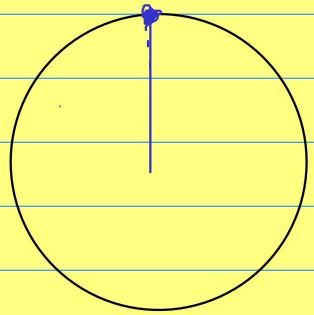
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = K\theta \\ \dot{\theta} = -K\varphi \end{array} \right. \rightsquigarrow \text{Los vap}: \quad \lambda^2 + K^2 = 0, \quad \lambda = \pm iK$$

Como los vap tienen parte real 0, no aplica H-G.

<u>n impar</u>: $\cos(n\pi) = -1 \rightarrow \underset{n \text{ impar}}{df(n\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}$

Los vap: $\lambda^2 - K^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm K$

Por H-G los puntos de equilibrio $(n\pi, 0)$ n impar son inestables.



n par.

e) Demostrar que si $\varphi(t)$ y $\theta(t)$ son soluciones a la ecuación matricial, entonces la función

$$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi$$

cumple $V(\varphi(t),\theta(t)) = cte$. Dar una interpretación física de este hecho.

$$\begin{cases} \dot\varphi = K\theta \\ \dot\theta = -K \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\dot V = \theta \underbrace{\dot\theta}_{-K\operatorname{sen}\varphi} + \operatorname{sen}\varphi \underbrace{\dot\varphi}_{K\theta} = 0$$

$\frac{1}{2}\theta^2$ es la energía cinética

$-\cos\varphi$ es la energía potencial)

$\Rightarrow V(\varphi,\theta)$ es la energía mecánica

$\dot V = 0$ quiere decir conservación de energía

f) Usando la parte anterior, estudiar la estabilidad de los puntos críticos.

Ver que $V(\varphi,\theta)$ cumple alguno de los teo de Lyapunov en $(\varphi,\theta) = (n\pi, 0)$ $\boxed{n \text{ par}}$

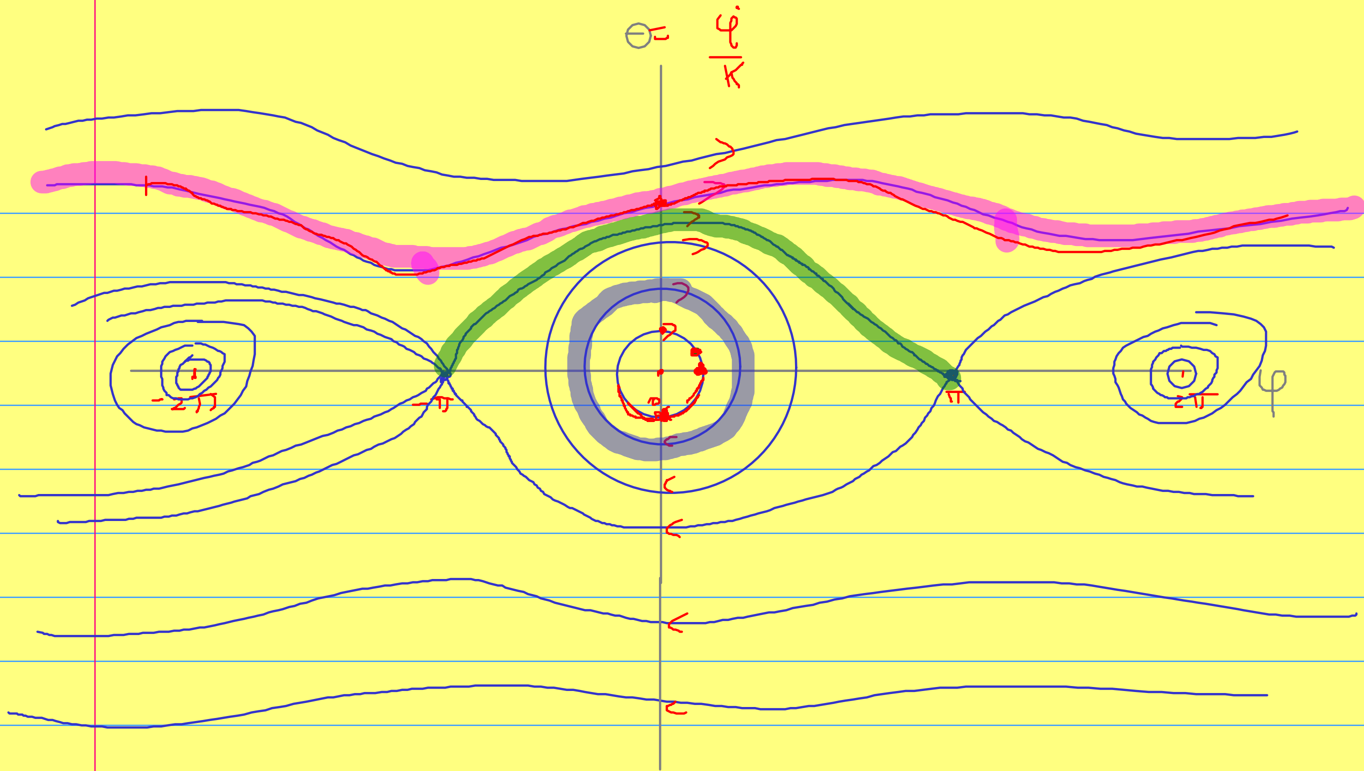
g) Esbozar un diagrama de fase de las soluciones a la ecuación matricial. Interpretarlo a partir del fenómeno físico que modela.

$$\dot x = (K\theta, -K\operatorname{sen}\varphi)$$

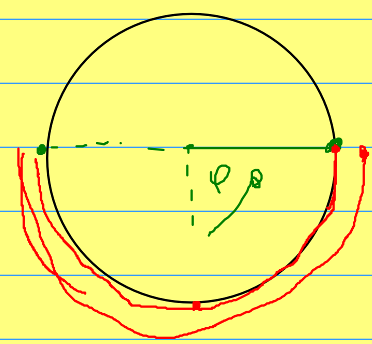
$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi \longrightarrow$ Las soluciones son las curvas de nivel de V

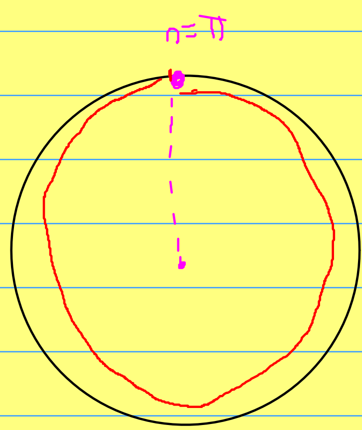
$$\underbrace{\frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi = C}_{\text{Curva nivel}} \Leftrightarrow \theta = \pm\sqrt{2C + 2\cos\varphi}$$

$$g(\varphi) = \sqrt{2C + 2\cos\varphi} = \theta$$

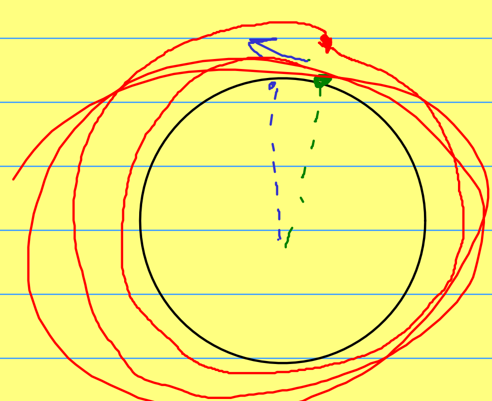


S: $\theta \in (-\pi, \pi)$:





$\theta \approx -\pi$



el péndulo amortiguado, en variables adimensionales,
:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - \sin x. \end{cases}$$

l origen es un punto fijo estable usando la función de
os x).

e el origen es un punto fijo asintóticamente estable u
punov $V(x,y) = 1/2(x+y)^2 + x^2 + 1/2y^2$ que la funci

• $V(x,y) = \frac{(x+y)^2}{2} + x^2 + \frac{y^2}{2}$

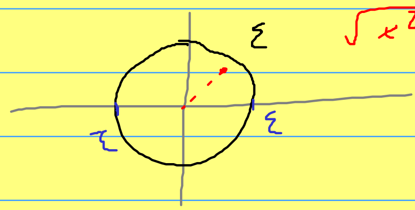
$\dot{V} = \frac{\cancel{2}(x+y)}{\cancel{2}}(\dot{x}+\dot{y}) + 2x\dot{x} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} y\dot{y}$

$= (x+y)(\cancel{y} + (\cancel{-y} - \operatorname{sen} x)) + 2xy + y(-y - \operatorname{sen}(x))$

$= (x+y)(-\operatorname{sen} x) + 2xy - y^2 - y \operatorname{sen}(x)$

$= -x \operatorname{sen} x + 2xy - 2y \operatorname{sen} x - y^2$

$\dot{V} < 0 \quad \forall (x,y) \in B((0,0), \varepsilon)$



$\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \longrightarrow |x|, |y| < \varepsilon$

Si $x \approx 0$, $\operatorname{sen}(x) \approx x$

$\operatorname{sen}(x) \approx x$

Si $\varepsilon = 1_0^{-10}$, $\operatorname{sen}(x) \approx x \to \dot{V} \approx -x^2 + 2\cancel{xy} - 2\cancel{xy} - y^2 < 0$