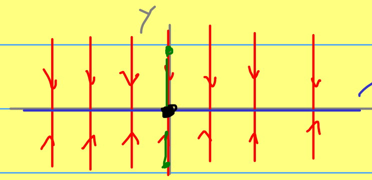
18/10

b) Dar un ejemplo de una ecuación diferencial que presente un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable, y que admita una trayectoria (distinta de la del equilibrio) que tienda en el futuro a dicho punto.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(x,y) = (0,-y)$$

Punto de equilibrio $(x, 0)$

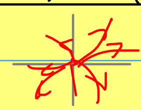
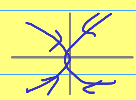
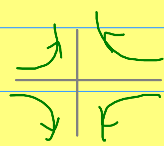
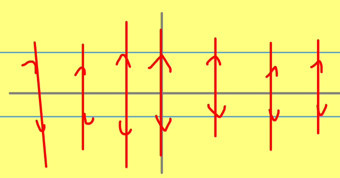
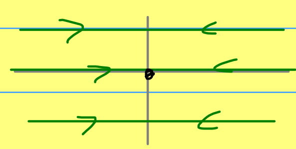
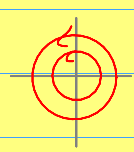
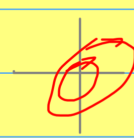
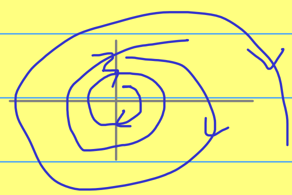


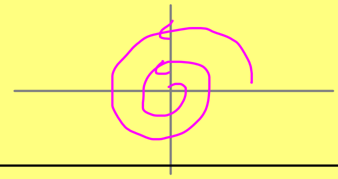
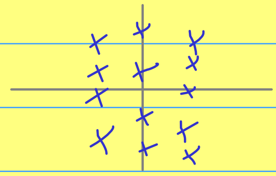
Estable

No es asintóticamente estable

Si arrancamos en $(0,1)$
$\downarrow$
$(0,0)$

Vap reales:

Vap	Diagrama de fase	Tipo
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$		Inestable
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$		Asint. estable
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$		Inestable.
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$		Inestable
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$		Estable, pero no asintóticamente estable.
$Re(\lambda) = 0$	 	Estable, pero no asintóticamente estable
$Re(\lambda) > 0$		Inestable

$Re(\lambda) < 0$		Asintóticamente estable.
$\lambda_1 = 0 = \lambda_2$		Estable

• <u>Linealización</u>: $\dot{x} = f(x)$ $\quad f \in C^1$

$$f(x) = f(\bar{x}) + df(\bar{x})(\bar{x} - x) + r(x^2) \longrightarrow$$ Taylor de orden 1 alrededor de $\bar{x}$

Si $\bar{x}$ es punto de equilibrio $\Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

$$f(x) \simeq df(\bar{x})(\bar{x} - x)$$

La linealización de $\dot{x} = f(x)$ es $\underbrace{\dot{x} = \overset{A}{\boxed{df(\bar{x})}}(\bar{x} - x)}_{\text{Sistema lineal}}$

<u>Teo H-G</u>: Si los vap de $df(\bar{x})$ no tienen parte real cero, entonces en un entorno de $\bar{x}$ punto de equilibrio $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x} = df(\bar{x})(\bar{x} - x)$ se comportan igual.

<u>Coro</u>: En las mismas hipótesis:

- Si los vap tiene todos parte real negativa entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable.
- Si algún vap tiene parte positiva $\Rightarrow \bar{x}$ es inestable

b) $\dot{x} = x^2$
$\dot{y} = -y$

$\longrightarrow f(x,y) = (x^2, -y)$

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Punto de equilibrio $\bar{x} = (0,0) \rightarrow df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Parte real cero

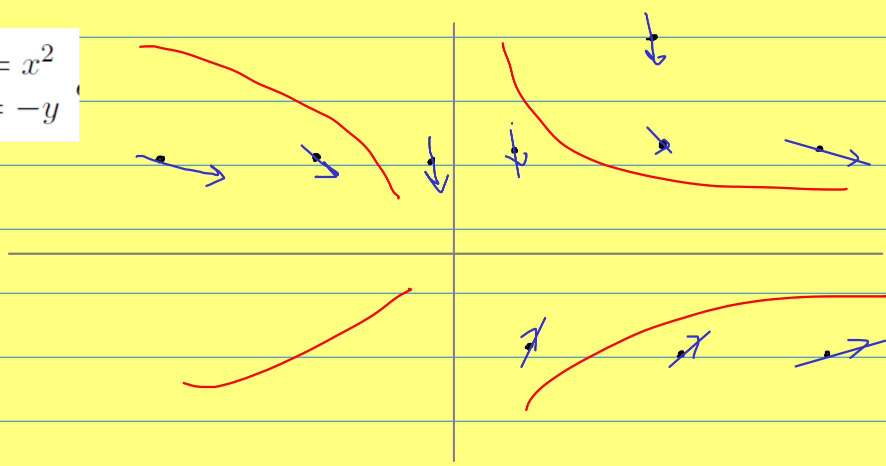
b) $x(t) = \dfrac{1}{c-t}$

$y(t) = \alpha e^{-t} \longrightarrow \dfrac{y}{\alpha} = e^{-t} \rightarrow \ln\left(\dfrac{y}{\alpha}\right) = -t$

$t = -\ln\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)$

$x = \dfrac{1}{c + \ln\left(\frac{y}{\alpha}\right)} \longrightarrow$

b) $\dot{x} = x^2$
$\dot{y} = -y$



(x,y)	$f(x,y)$
$(1,1)$	$(1,-1)$
$(2,1)$	$(4,-1)$
$(\frac{1}{2},1)$	$(\frac{1}{4},-1)$
$(1,-1)$	$(1,1)$
$(1,2)$	$(1,-2)$
$(-1,1)$	$(1,-1)$
$(-2,1)$	$(4,-1)$
$(-\frac{1}{2},1)$	$(\frac{1}{4},-1)$

Lyapunov:

$\dot{x} = f(x)$ con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ loc. Lipschitz, $\bar{x}$ punto de equilibrio, U un entorno (abierto) de $\bar{x}$ $\cap \Omega$
y

$V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Lyapunov 1</u>: i) $V(x) \geq V(\bar{x}) \quad \forall x \in U$
ii) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$

Entonces $\bar{x}$ es estable.

V tiene un mínimo est. en $\bar{x}$.

<u>Lyapunov 2</u>: i) $\underbrace{V(x) \geq V(\bar{x})}$ $\forall x \in U$
ii) $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U - \{\bar{x}\}$

Entonces $\bar{x}$ es asint. estable.

<u>Obs</u>: $\dot{(V(\varphi(t)))} = \nabla V(\underbrace{\varphi(t)}_{x}) \cdot \underbrace{\dot{\varphi}(t)}_{f} \to \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$

<u>Def</u>: Una función $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de Lyapunov, si cumple alguna de las hipótesis de Lyapunov.

4. Sea λ un número real. Discutir según λ si el origen es un punto estable, inestable o asintóticamente estable para:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x\\ \dot{y} &= x + \lambda y\end{aligned}}$$

$f(x,y) = (\lambda x, x + \lambda y)$

Determinar los valores de a y b que hacen que $\underbrace{ax^2 + by^2}_{V(x,y)}$ sea una función de Liapunov. Comparar.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriz de Jordan $\rightarrow$ Repasar los diagramas de fase de Jordan 2×2

$V(x,y) = ax^2 + by^2$. i) $V(x,y) > \underset{0}{V(0,0)}$ $\forall (x,y) \in U \setminus \{(0,0)\}$

$\underbrace{ax^2 + by^2 > 0}$ $\forall (x,y) \in U \setminus \{(0,0)\}$

$\varphi(t) = (x(t), y(t))$

$a, b > 0$

ii) $\dot{V}(x,y) = 2ax\underset{\lambda x}{\dot{x}} + 2by\underset{x+\lambda y}{\dot{y}}$

$\dot{V}(x,y) = 2\lambda a x^2 + 2bxy + 2\lambda b y^2$

Queremos ver si: i) $\dot{V}(x,y) \leq 0$ $\forall (x,y)$

ó

ii) $\dot{V}(x,y) < 0$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$

Forma cuadrática asociada $A = \begin{pmatrix} 2\lambda a & b \\ b & 2\lambda b \end{pmatrix}$

$\dot{V}(x,y) < 0$ sii la forma cuadrática es definida negativa

sii los vaps son negativos.

¿Cómo saber si van a existir vap negativos?

Si $PAP^{-1} = D$ con $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \rightarrow tr(A) = tr(D)$

$det(A) = det(D)$

• $tr(D) = \mu_1 + \mu_2 < 0$

$tr(A) = 2\lambda a + 2\lambda b = 2\lambda \underbrace{(a+b)}_{>0} \rightarrow \lambda < 0$ necesariamente

• $det(D) = \mu_1 \mu_2 > 0$

• $det(D) = 4\lambda^2 ab - b^2 > 0$

↳ Queremos

Hay que encontrar a, b (en función de λ) tq

$a, b > 0$

$\lambda < 0$

$$4\lambda^2 ab - b^2 > 0$$

$$\underbrace{(4\lambda^2 a - b)}\ \underbrace{b}_{b>0} > 0$$

$$\hookrightarrow 4\lambda^2 a - b > 0 \rightarrow \boxed{a > \frac{b}{4\lambda^2}}$$

Si $a, b > 0$, $\lambda < 0$ y $a > \frac{b}{4\lambda^2} \Rightarrow V = ax^2 + by^2$

cumple 1 y a punto 2

Por lo tanto $\bar{x} = (0, 0)$ es asintóticamente estable.

c) $\dot{x} = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2,$
$\dot{y} = -y^3$, $V(x,y) = ax^2 + by^2$

i) $V(x,y) > V(0,0) = 0 \rightsquigarrow a,b > 0$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$

ii) $\dot{V}(x,y) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y}$

$= 2ax\left(-\frac{x^3}{2} + 2xy^2\right) + 2by\left(-y^3\right)$

$= -ax^4 + 4ax^2y^2 - 2by^4$, $a,b>0$ tq $\dot{V}(x,y) \leq 0$ $\boxed{\forall (x,y) \neq (0,0)}$

Sean $X = x^2$ e $Y = y^2$

$V(X,Y) = -aX^2 + 4aXY - 2bY^2 \longrightarrow$ Forma cuadrática

$A = \begin{pmatrix} -a & 2a \\ 2a & -2b \end{pmatrix}$

$tr(A) = -a - 2b < 0$, porque $a,b>0$.

$det(A) = \underbrace{2ab - 4a^2 > 0}$

$2ab - 4a > 0$ sii $(2b-4a)a > 0$ si $2b - 4a > 0$

sii $\boxed{b > 2a}$

$\Delta = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0 , b > 2a\}$

Si $(a,b) \in \Delta \Rightarrow V(x,y) = ax^2 + by^2$ cumple Lyapunov 2 $\Rightarrow \bar{X} = (0,0)$ es asint. estable.