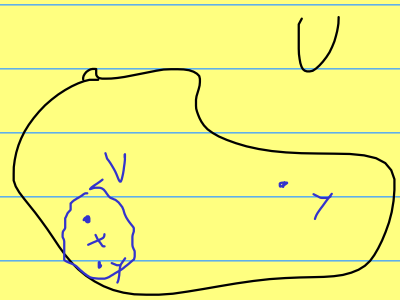
15/9

Def: • $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz si existe $K > 0$ tal que

$$0 \leq \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \quad \forall x, y \in U$$

• $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz si $\forall x \in U$, existe un entorno $V \ni x$ y K_x tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K_x \|x - y\| \quad \forall x, y \in V$$



- $f: \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(t, x) \longmapsto f(t,x)$$

f es loc. Lipschitz respecto a la variable espacial, si dejando t_0 fijo, la función $f_{t_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es loc Lipschitz.

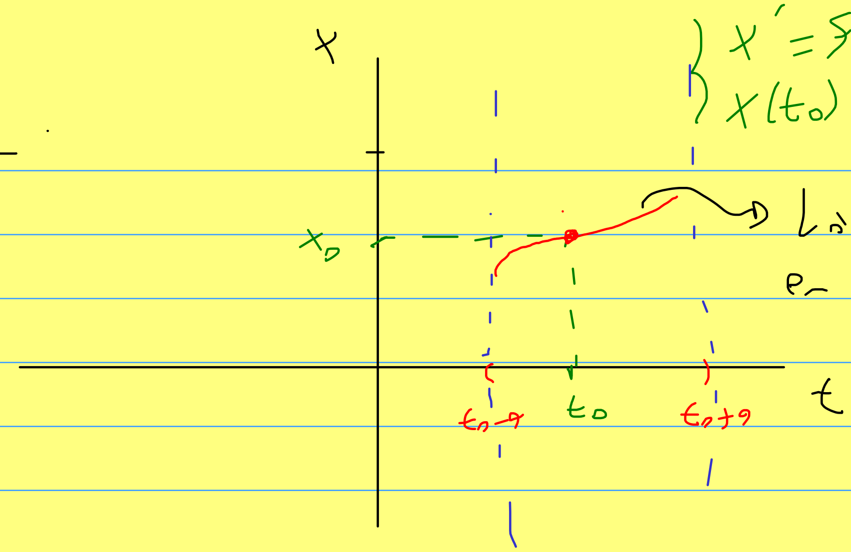
Teo (Picard): $f: \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ loc. Lipschitz respecto a la variable espacial y continua, entonces:

$\exists\, \alpha > 0$ tal que el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única en $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$

$\mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La solución es única en (t_0-a, t_0+a)

1. Probar que existe más de una solución para la ecuación:

$$\begin{cases} x' = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

¿Qué hipótesis del teorema de Picard no se verifica?

- $x(t)=0 \quad \forall t$ es una solución posible
- $\dfrac{x'}{x^{1/2}} = 1 \to \int x^{-1/2}\,dx = t + K$

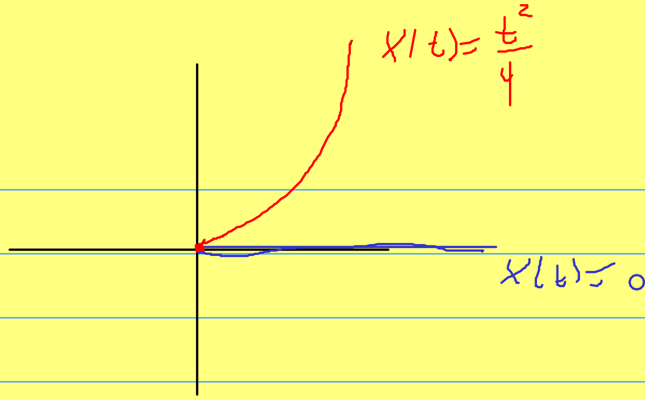
Primitiva: $2x^{1/2} \to x(t)^{1/2} = \dfrac{t}{2} + \tilde{K}$

$\to x(t) = \left(\dfrac{t}{2} + \tilde{K}\right)^2$

- $\underset{0}{\underset{\parallel}{x(0)}} = \tilde{K}^2 \to \tilde{K}^2 = 0 \to \tilde{K} = 0$

$$\boxed{x(t) = \frac{t^2}{4}}$$

$x' = \dfrac{2t}{4} = \dfrac{t}{2} = \sqrt{\dfrac{t^2}{4}} = \sqrt{x}$



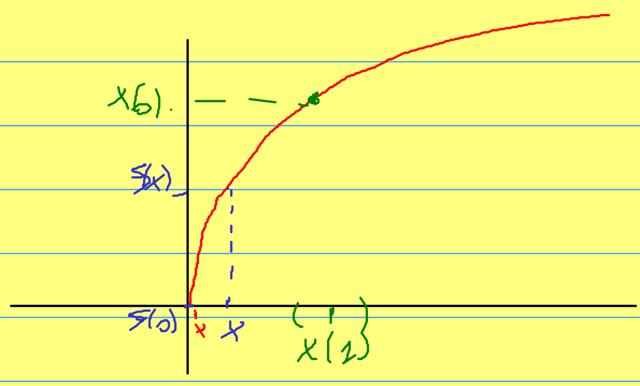
Veamos que $f(t,x)=\sqrt{x}$ no es loc. Lipschitz en $x=0$

$$\|f(x)-f(0)\| > K\,\|x-0\| \qquad \forall K>0$$

En $\mathbb{R}$: $\quad |f(x)-f(0)| > K\,|x-0| \quad \forall x$ en un entorno de 0

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} > K$$

Obs: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} \longrightarrow +\infty$



$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} \leq K\,\cancel{|x-0|}$$

$f(x)=\sqrt{x}$ no es loc. Lipschitz en $x=0$

2. Sea la ecuación:

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si} \quad (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

a) Probar que, para todo $c \in \mathbb{R}$, $x(t) = c^2 - \sqrt{t^4 + c^4}$ es solución con condición inicial $x(0) = 0$.

b) ¿Qué hipótesis del teorema de Picard no se verifica?

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si } (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

a) Hay que ver que $x' = f(t,x)$.

b) Veamos si es continua en $(0,0)$, es decir si

$$\lim_{(t,x)\to(0,0)} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} = f(0,0) = 0$$

Veamos si es lo. Lipschitz en $(0,0)$

$\exists K>0$ tq $\|f(t,x) - f(t,0)\| \leq K\|x-0\|$

$$\left|\frac{4t^3x}{t^4+x^2}\right| \leq K|x| \quad \text{con } t \text{ fijo}$$

$$\parallel$$

$$\left|\frac{4t^3}{t^4+x^2}\right| |x| \leq K|x|$$

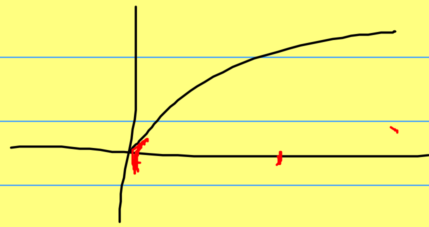
$\hookrightarrow$ si $x=0$, $\left|\frac{4t^3}{t^4}\right| = \overset{K}{\frac{4}{|t|}}$

$$\left|\frac{4t^3}{t^4+x^2}\right| |x| \overset{?}{\leq} \overset{K}{\left|\frac{4}{t}\right|} |x|$$

Intervalo maximal

$\exists\, \alpha > 0$ $\quad t_0 \dots \quad (t_0-\alpha, t_0+\alpha)$

Ej: $x' = \sqrt{x}$



$x' = x \to x(t) = 4e^{t}$

Teorema 0.3. ***Existencia de solución maximal.***

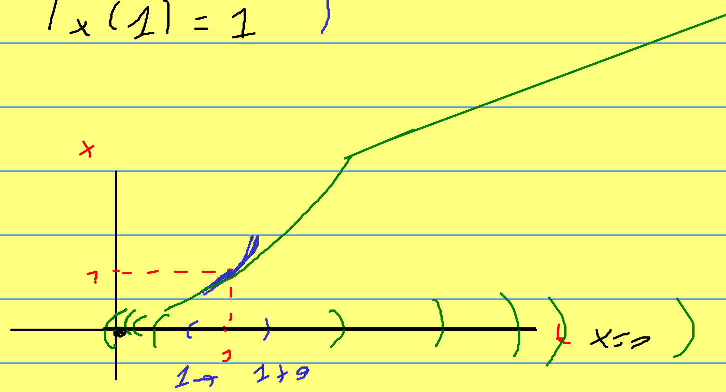
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y continua. Entonces para cualquier condición inicial $(t_0, x_0) \in \Omega$ el problema

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal.

$\begin{cases} x' = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ no tiene solución única

$\begin{cases} x' = x^{1/2} \\ x(1) = 1 \end{cases}$ Vale Picard



3. Para las siguientes ecuaciones

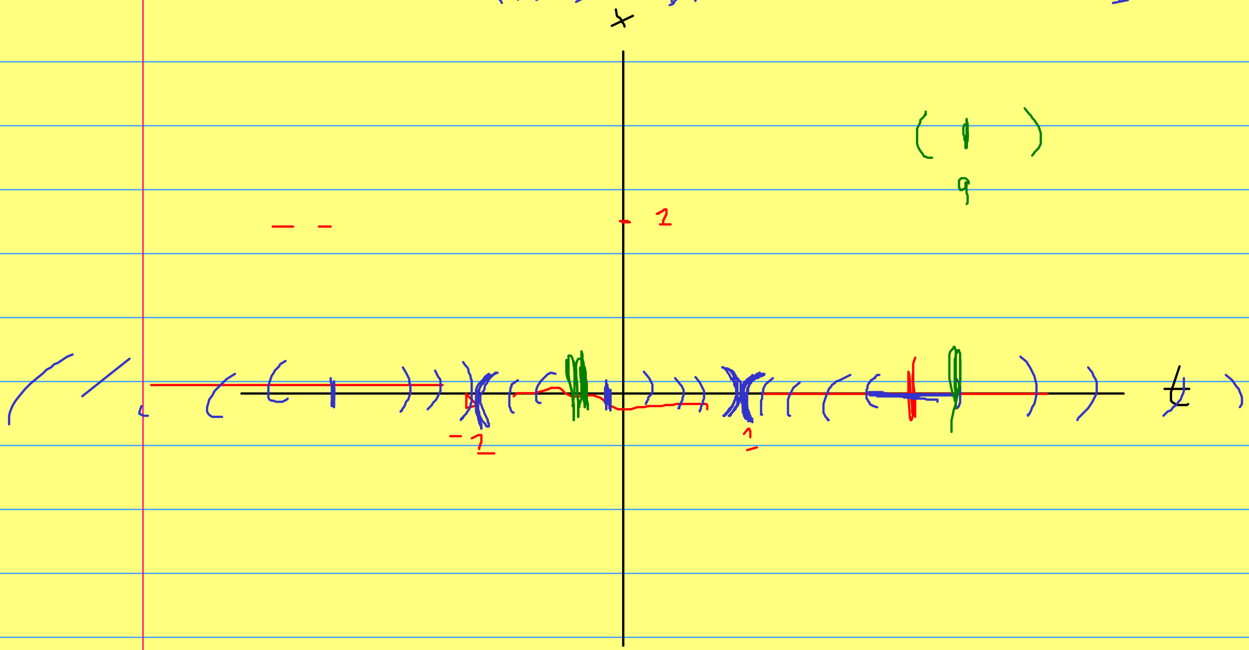
$x' = f(t, x)$

a) $x' = x^2 - 1$

En $x(0) = 1$ y $x(0) = -1$ la solución no es única.

Hallar la solución de $x' = x^2 - 1$. (variables separables)

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$



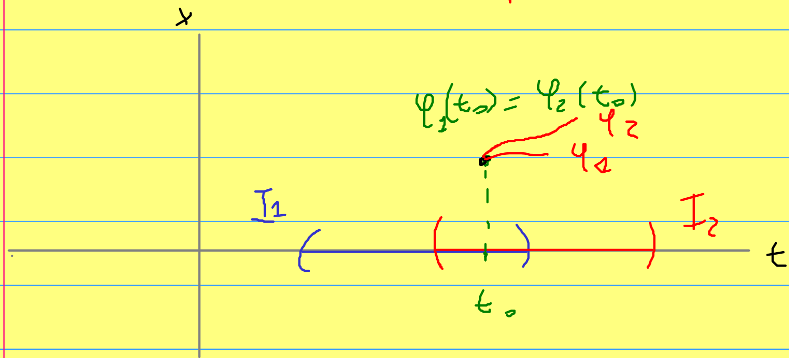
4. **Comparación de soluciones** - Sean f_1 y f_2 dos funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y a valores en $\mathbb{R}$. Supongamos que para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $f_1(t,x) \leqslant f_2(t,x)$. Demostrar que, si $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $x' = f_1(t,x)$, $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $x' = f_2(t,x)$, y además existe $t_0 \in I_1 \bigcap I_2$ tal que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, entonces se cumple que $\varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \bigcap I_2$ mayor que t_0. ¿Qué ocurre si $t < t_0$?

$\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ solución de $x' = f_1$

$f_1 \leq f_2$

$\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ solución de $x' = f_2$

$t_0 \in I_1 \cap I_2$ t.q. $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$



φ_1 es solución de $x' = f_1$

φ_2 es solución de $x' = f_2$

$\varphi_1' = f_1 \leq f_2 = \varphi_2'$ $\quad f_1 \leq f_2$

- $\varphi_1 \leq \varphi_2$

$\varphi_1 - \varphi_2 \leq 0$

$\varphi_1 = \int \varphi_1' = \int f_1 \leq \int f_2 = \int \varphi_2' = \varphi_2$

$\boxed{D = \varphi_1 - \varphi_2}$

$D(t_0) = \varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) = 0$

$f_1 \leq f_2$

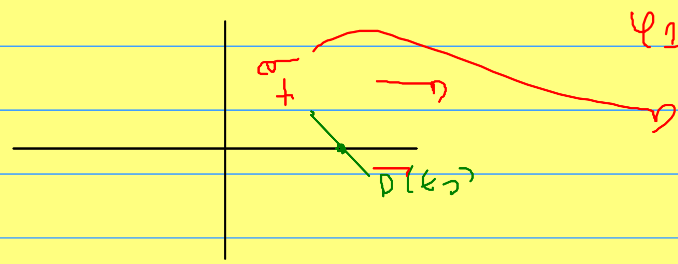
$D' = \varphi_1' - \varphi_2' = f_1 - f_2 \leq 0$

Como $D' \leq 0$ si $t \in I_1 \cap I_2 \cap \{t < t_0\}$

y $D(t_0) = 0 \Rightarrow D(t) \leq 0$, es decir

$\varphi_1 - \varphi_2 \leq 0$

$\varphi_1 \leq \varphi_2$



$D \geq 0$

$\varphi_1 - \varphi_2 \geq 0 \to \varphi_1 \geq \varphi_2$

5. Utilizando el ejercicio anterior, demostrar que las soluciones de la ecuación $x' = t^2 + x^2$ están definidas en un intervalo acotado.

$0 \le f_1$

$f_1 \le f_2 \quad \forall (t,x)$

φ_1 solución de $x' = f_1$

φ_2 solución de $x' = f_2$

$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$

$\varphi_1 \le \varphi_2$ a futuro.