13/9

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$x(t) = x_0 \, e^{At} \longrightarrow \text{Exponencial}$$

$$A = P\boxed{B}P^{-1} \longrightarrow e^{At} = P e^{Bt} P^{-1}$$

- Diagonal
- De Jordan
- $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ $(\lambda = \alpha + i\beta$ vap complejos$)$

11. Encontrar la solución general del sistema

$$x' = Ax$$

cuando A es una matriz diagonal $n \times n$. ¿Qué condición debe cumplir A para que todas las soluciones cumplan que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$?

vector

- $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$\boxed{x(t) = x_0 \, e^{At}} \longrightarrow \text{General, no importa si } A \text{ es diagonal o no.}$$

$$e^{At} = \text{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right)$$

$$x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = \left(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, x_2^0 e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_n^0 e^{\lambda_n t} \right)$$

¿Qué condiciones tiene que cumplir A para que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = (0, \ldots\ldots, 0) \quad ?$$

- Si $\lambda_j > 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x_j e^{\lambda_j t} \longrightarrow \pm\infty$ si $x_j \neq 0$
- Si $\lambda_j = 0 \Rightarrow e^{\lambda_j t} = 1 \ \forall t \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x_j = x_j$
- Si $\lambda_j < 0 \Rightarrow x_j e^{\lambda_j t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

12. (a) Dada una matriz A, probar que si α no es valor propio entonces la ecuación $x' = Ax + e^{\alpha t} b$ tiene una única solución de la forma $x(t) = e^{\alpha t} u$ con $u \in \mathbb{R}^n$. Calcular u en función de A, b y α.

(b) Resolver el sistema:

$$x' = 2x + y + e^{2t}$$
$$y' = x + 2y - e^{2t}$$

a) A, α no es un vap de A.

Probar: $\exists!$ $x_p(t) = e^{\alpha t} u$, $u \in \mathbb{R}^n$ solución particular de

$$\boxed{\underset{\mathcal{M}_{n\times n}}{x' = A} x + e^{\alpha t} \underset{\mathbb{R}^n}{b}}$$

Demo: $x_p(t) = e^{\alpha t} u$ es única si y sólo si $u \in \mathbb{R}^n$ es único, ya que $e^{\alpha t}$ está fijo pues α viene dado por la ecuación diferencial

$x_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$x_p(t) = e^{\alpha t} u$ es solución

$$\Updownarrow$$

$$\dot{x}_p = A x_p + e^{\alpha t} b$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha e^{\alpha t} u + \cancel{e^{\alpha t} u'} = A e^{\alpha t} u + e^{\alpha t} b$$

0 porque u es un vector constante

$$\Updownarrow$$

$$\alpha e^{\alpha t} u = A e^{\alpha t} u + e^{\alpha t} b$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < e^{\alpha t} \cdot [\alpha u - Au - b] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha u - Au - b = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha u - Au = b$$

Truco: $\alpha u = \alpha I u$

$$\Updownarrow$$

$$(\alpha I - A)u = b$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{(\alpha I - A)^{-1}(\alpha I - A)}_{Id} u = (\alpha I - A)^{-1} b$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{u = (\alpha I - A)^{-1} b}$$

Por hipótesis $\det(A - \alpha I) \neq 0$

por que α no es vap de A

Luego $\det(\alpha I - A) = (-1)^n \det(A - \alpha I) \neq 0$

Entonces $\alpha I - A$ es invertible

La unicidad sale del hecho de que u queda completamente determinado por α, A y b (que son fijos)

(b) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t} \\ y' = x + 2y - e^{2t} \end{cases}$$

1) $\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} X + e^{\overset{\alpha}{2}t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}$

2) • Si 2 no es vap de A entonces

$X_p(t) = e^{2t} u$ es una solución particular

donde $u = (2I - A)^{-1} b$

3) Por otro lado sabemos hallar $X_h(t)$ solución de:

$$\dot{X}_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X_h$$

4) La solución general es:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

13. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$x' = Ax$$

donde A es una matriz $n \times n$. Se definen

$$E^s = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)<0} E_\lambda; \quad E^c = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)=0} E_\lambda; \quad E^u = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)>0} E_\lambda$$

λ_i los valores propios

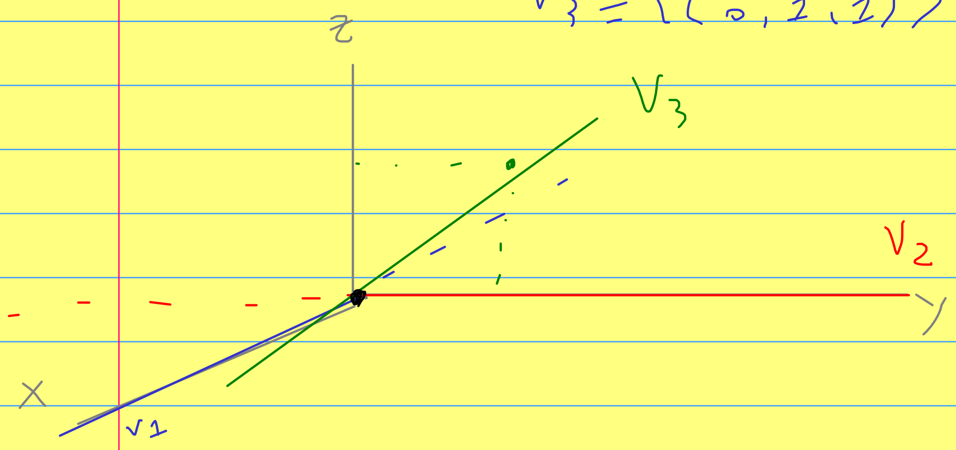
$E_\lambda = \mathrm{Ker}((A-\lambda I)^n)$

$\to E^s = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)<0} E_\lambda$ → Suma directa de los subespacios propios asociados a vap con parte real negativa

$V + W = \{v + w : v \in V, w \in W\}$, $V \oplus W$ si $V \cap W = \{0\}$

$V \oplus W = V \times W$ (solo para finitos sumandos)

Ej: En $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \langle (1,0,0) \rangle$
$V_2 = \langle (0,1,0) \rangle$
$V_3 = \langle (0,1,1) \rangle$



$V_1 \times V_2$
$=$
$\{(x,y) : x \in V_1, y \in V_2\}$
$=$
$\{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$E^c = \bigoplus_{Re(\lambda)=0} E_\lambda$$

$$E^u = \bigoplus_{Re(\lambda)>0} E_\lambda$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$ y $E_{-1} = \langle (1,0,0) \rangle$

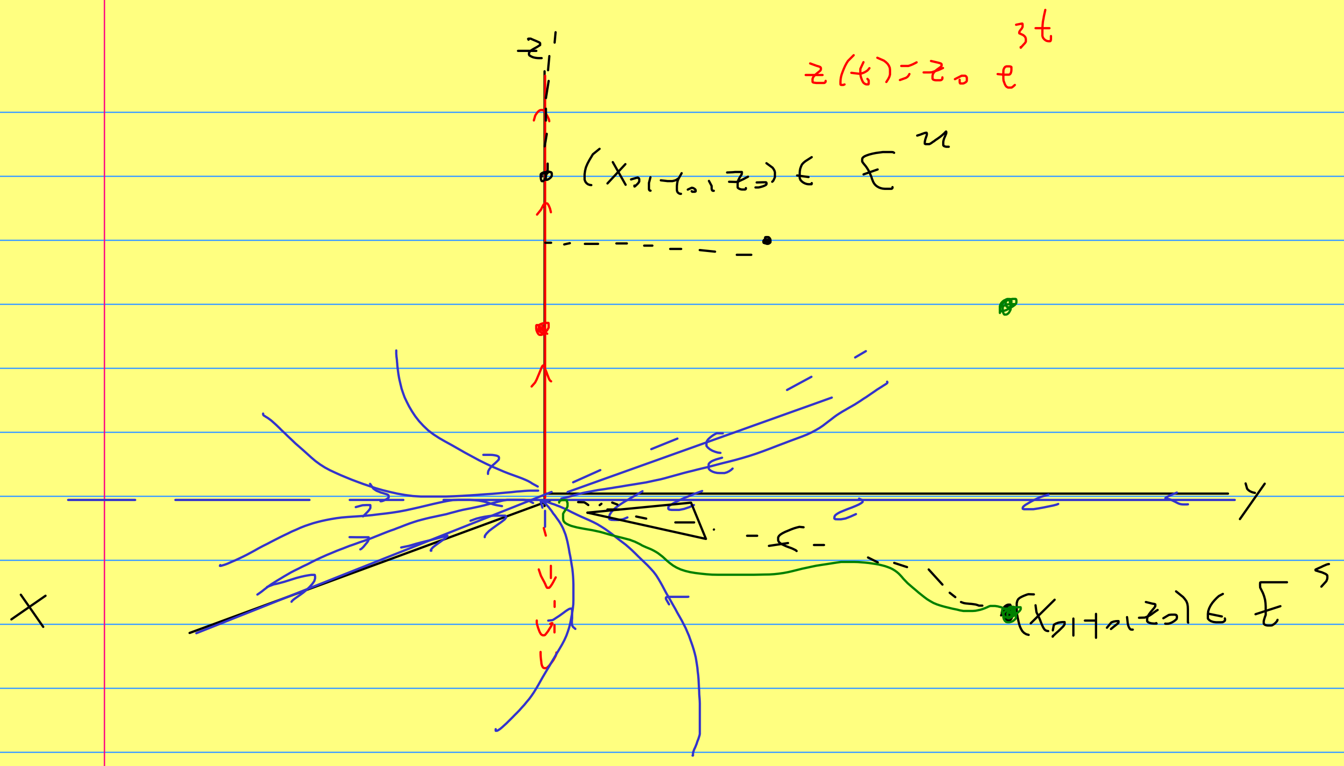
$\lambda_2 = -2$ y $E_{-2} = \langle (0,1,0) \rangle$

$\lambda_3 = 3$ y $E_3 = \langle (0,0,3) \rangle$

$E^s = \bigoplus_{Re(\lambda)<0} E_\lambda = E_{-1} \oplus E_{-2}$ "=" plano xy

$E^c = \bigoplus_{Re(\lambda)=0} E_\lambda = \phi$

$E^u = \bigoplus_{Re(\lambda)} E_\lambda = E_3$ "=" eje z



$z(t) = z_0 e^{3t}$
$(x_0, y_0, z_0) \in E^u$
$(x_0, y_0, z_0) \in E^s$
z
y
x

$$\begin{array}{c} B \\ A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

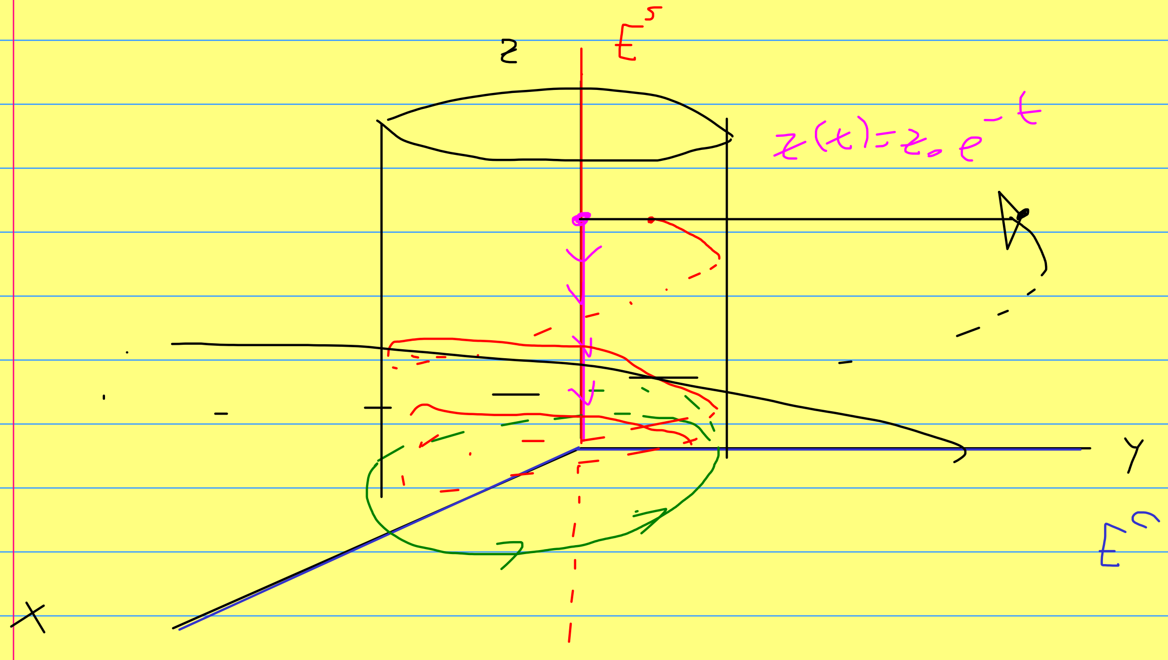
Vap de B : $\quad p_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 \to \lambda = \pm i \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

$A = PEP^{-1}$ con $E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & -1 \end{pmatrix}$

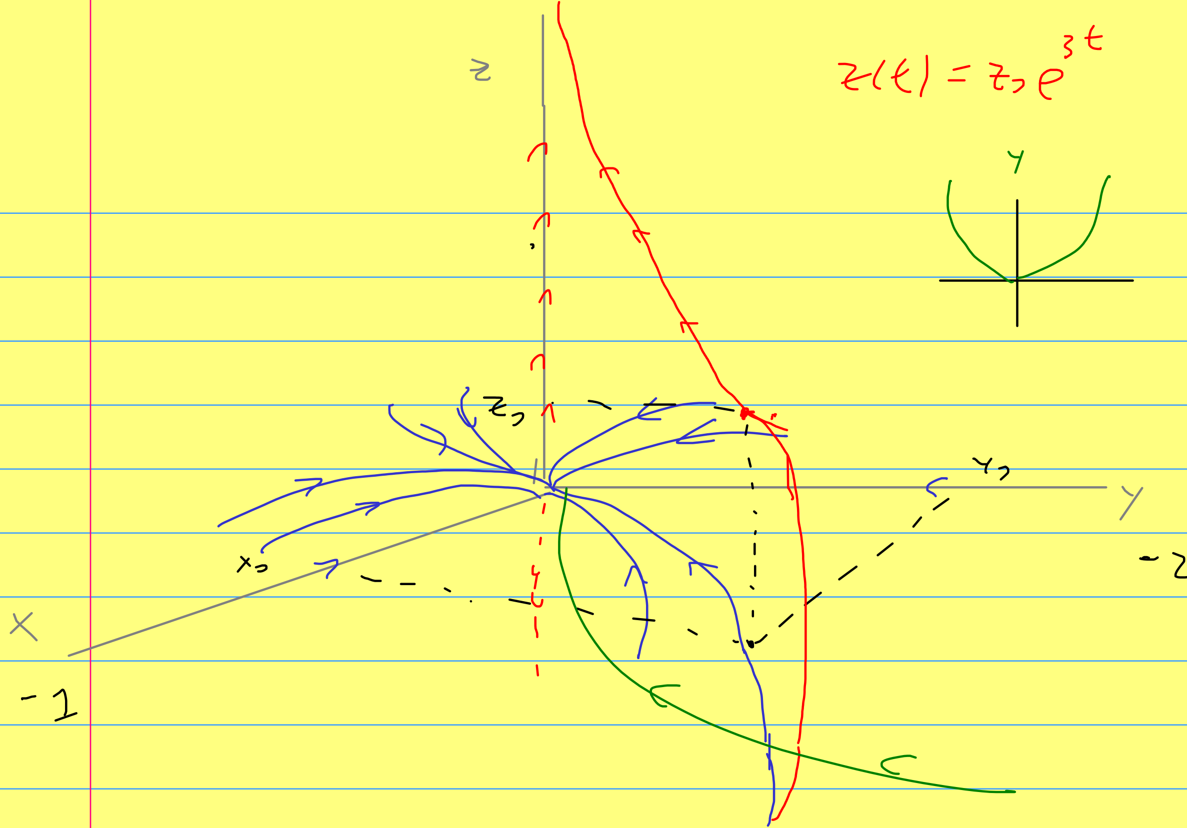
$$E^u = \bigoplus_{Re(\lambda)>0} E_\lambda = \phi$$

$$E^s = \bigoplus_{Re(\lambda)<0} E_\lambda = E_{-1} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$E^c = \bigoplus_{Re(\lambda)=0} E_\lambda = E_i \oplus E_{-i} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$



$z(t) = z_0 e^{3t}$



$x(t) = x_0 e^{-t} \rightarrow t = -\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$

$y(t) = y_0 e^{-2t} \rightarrow y(t) = y_0 \, e^{+2\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}$

$= y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{+2} = \left(\frac{y_0}{x_0^2}\right) x^2$