2/8

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra y algunas de sus derivadas.

Ej: $F = m x''$

• $\downarrow P = -mg$

$$\left.\right\} \begin{array}{l} -mg = m x'' \\ -g = x'' \end{array}$$

Resistencia, Carga, Fuente

• $L q'' + R q' + \frac{1}{C} q = E(t)$

Inductancia, Capacitancia

• Dada una ecuación diferencial, decimos que la función $x(t)$ es solución si verifica la ecuación.

Ej: $x'(t) = x(t) \to x' = x$

Una posible solución es $\boxed{x(t) = e^t}$ $x' = e^t = x$

La solución general $x(t) = K e^t$, $K \in \mathbb{R}$

Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = -g \\ x'(t_0) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$\to x(t) = x_0 + v_0 t - g\frac{t^2}{2}$

Los exponentes en la variable dependiente y sus derivadas es 1

Ecuación diferencial lineal de orden 1

El mayor orden de derivada que aparece.

Ej: • $x'' = \frac{F}{m}$, es de orden 2

si es lineal

variable independiente

• $x' + 5x = 3t$

variable dependiente

• $y' + 5y = 3x$

• $y' + 5y^2 = 3x$ No es lineal.

• $(y')^2 + 5y = 3x$ tampoco es lineal

Solución a una ecuación lineal de orden 1:

$$\boxed{x' + f(t)x = g(t)}$$

La solución es:

$$x(t) = Ke^{-\int f(t)dt} + e^{-\int f(t)dt} \int g(t)e^{+\int f(t)dt}\, dt$$

Importante: La ecuación sirve si y sólo si la " diferencial está escrita:

$$\boxed{x' + f(t)x = g(t)}$$

Ej: 1) $x' + \overset{f(t)}{3}x = \overset{g(t)}{0} \rightarrow x' = -3x \rightarrow x(t) = Ke^{-3t}$

$e^{-\int f(t)\,dt}$: $\int f(t)\,dt = \int 3\,dt = 3t$

$$\Rightarrow e^{-\int f(t)\,dt} = e^{-3t}$$

2) $x' + 3x = 0 \rightarrow x' = -3x$

$\boxed{x' = f(t)x + g(t)}$

$\int f(t)\,dt = \int -3\,dt = -3t$

$x(t) = Ke^{3t} \rightarrow x' = 3Ke^{3t} = 3x$

4. c) $y' + y\cos(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x)$.

$y' + \overbrace{f(x)}^{\cos(x)}y = \overbrace{g(x)}^{\cos(x)\mathrm{sen}(x)}$

La solución es: $y(x) = K\underbrace{e^{-\int f(x)dx}}_{e^{-\mathrm{sen}(x)}} + \underbrace{e^{-\int f(x)dx}}_{e^{-\mathrm{sen}(x)}}\underbrace{\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx}_{e^{\mathrm{sen}(x)}[\mathrm{sen}(x)-1]}$

$e^{\mathrm{sen}(x)}$

- $\int f(x)dx = \int \cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x)$

- $\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx = \int \overbrace{\cos(x)\,\underbrace{\mathrm{sen}(x)\,e^{\mathrm{sen}(x)}}_{ue^u}\,dx}^{du}$

$u = \mathrm{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x)\,dx$

$\int ue^u\,du$ $\qquad F(u) = u \rightarrow F' = 1$
$\qquad G'(u) = e^u \rightarrow G = e^u$

$\int FG' = FG - \int F'G$

$$\int u e^{u} du = u e^{u} - \int e^{u}\, du$$

$$= u e^{u} - e^{u} = e^{u}[u-1]$$

Si $u = sen(x)$, $\displaystyle\int g(x) e^{\int f(x)dx} dx = e^{sen(x)}[sen(x) - 1]$

La solución de $y' + \cos(x) y = sen(x)\cos(x)$ es

$$e^{0} = 1$$

$$y(x) = K e^{-sen(x)} + e^{-sen(x)} e^{sen(x)} [sen(x) - 1]$$

$$\boxed{y(x) = K e^{-sen(x)} + sen(x) - 1}$$

Veamos que es solución: $\underline{y' + \cos(x)}\, y = \cos(x) sen(x)$

$$y' = -K\cos(x) e^{-sen(x)} + \cos(x)$$

$$y' + \cos(x) y = -K\cos(x) e^{-sen(x)} + \cos(x) + \cos(x)\left[K e^{-sen(x)} + sen(x) - 1\right]$$

$$= \cancel{-K\cos(x) e^{-sen(x)}} + \cancel{\cos(x)} + \cancel{K\cos(x) e^{-sen(x)}} + \cos(x) sen(x) - \cancel{\cos(x)}$$

$$= \cos(x) sen(x)$$

Variables separables:

$$x' = f(x) \cdot g(t)$$

$$y' = f(y) \cdot g(x)$$

Ej: $x' = x\,t$

$x' = \text{sen}(x)\, e^{t^2} \cos(t)$

$x' = 5e^{t}$

$x' = \text{sen}(x e^{y})$ No es variable separable

¿Cómo se resuelve?

1º) Separar las variables

$$x' = f(x)\, g(t) \longmapsto \frac{x'}{f(x)} = g(t)$$

Ojo: Al hacer esto es importante verificar que $f(x) \neq 0$.

2º) Integrar respecto a la variable independiente.

$$\int \frac{x'}{f(x)} \underbrace{x'\,dt}_{dx} = \int g(t)\,dt$$

$x = x(t) \to dx = x'\,dt$

$$\int \frac{1}{f(x)}\,dx = \int g(t)\,dt$$

3º) (De ser posible) despejar $x(t)$.

$y' = f(y) \cdot g(x)$

1. b) $(1+e^x)yy' = e^x$.

Observar que $e^x > 0 \Rightarrow 1+e^x > 1$ $\forall x$

1°) $\underbrace{y}_{\frac{1}{f(y)}}\, y' = \underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{g(x)}$

2°) $\underbrace{\int y \overbrace{y' dx}^{dy}}_{\int y\, dy} = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$\frac{y^2(x)}{2}$

$u = 1+e^x \rightarrow du = e^x dx$

$\int \frac{1}{u} du = \ln(|u|)$
$= \ln(|1+e^x|) = \ln(1+e^x) + K$

$$\frac{y^2(x)}{2} = \ln(1+e^x) + K$$

3°) $\boxed{y(x) = \pm\sqrt{2\ln(1+e^x) + 2K}}$ → la solución general es esta.