27/8

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (1,1)$ (b

$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\mathcal{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

1) $\mathcal{X}' = A\mathcal{X}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$

2) • ¿ A es diagonalizable?

Polinomio característico:

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$\det(A - \lambda Id) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2$
$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$

$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4}$

$\lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ → $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la matriz es diagonalizable.

$$\exists\ P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : P A P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

3) En las coordenadas: $\begin{cases} u' = 4u + 0v = 4u \\ v' = 0u + 1v = v \end{cases}$

Acá es más sencillo resolver:

$$\begin{cases} u' = 4u \\ v' = v \end{cases}$$

- $u' = 4u \rightsquigarrow \displaystyle\int \frac{\overset{du}{u' dt}}{u} = \int 4\, dt$

$$\ln(u) = 4t + t_0$$

$$u(t) = \underbrace{e^{t_0}}_{u_0} e^{4t} \to \boxed{u(t) = u_0 e^{4t}}$$

- $v' = v \to \boxed{v(t) = v_0 e^{t}}$

4) ¿Cómo volvemos a trabajar con $x(t)$ e $y(t)$?

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \boxed{\dot{Y} = D Y}$$

$$Y(t) = P^{-1} X(t) \to \boxed{P\, Y(t) = X(t)}$$

De CTAL 2 sabemos que la matriz P es la matriz cuyas columnas son los vectores propios.

. ¿Cómo hallamos vectores propios?

v_1: Lo que sabemos $v_1 \in Ker(A - 1I)$

$Ker(A-I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (A-I)(x,y) = (0,0)\}$

$$A - I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Queremos

$$\begin{cases} x - y = 0 & (i) \\ -2x + 2y = 0 & (ii) \end{cases}$$

$(ii) = -2\ (i)$

$x - y = 0 \rightarrow \boxed{x = y}$

$Ker(A-I) = \{(x,y) : x = y\}$

Por ejemplo un vector propio posible es $(1,1) = V_1$

V_4: $(A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

$-2x - y = 0 \rightarrow \boxed{y = -2x}$

$Ker(A - 4I) = \{(x,y) : y = -2x\}$

Un posible vector propio es $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P = (v_4 \mid v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $$X(t) = P\,Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 e^{4t} \\ v_0 e^{t} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} u_0 e^{4t} + v_0 e^{t} \\ -2u_0 e^{4t} + v_0 e^{t} \end{pmatrix}}$$

Conocemos

6) $$\begin{aligned} x_0 &= u_0 + v_0 \\ y_0 &= -2u_0 + v_0 \end{aligned}$$ $\rightsquigarrow$ Esto sale de evaluar en $t=0$

$$\begin{cases} 1 = u_0 + v_0 & (i) \\ 1 = -2u_0 + v_0 & (ii) \end{cases}$$

$(i) - (ii)$: $0 = 3u_0 \to \boxed{u_0 = 0}$

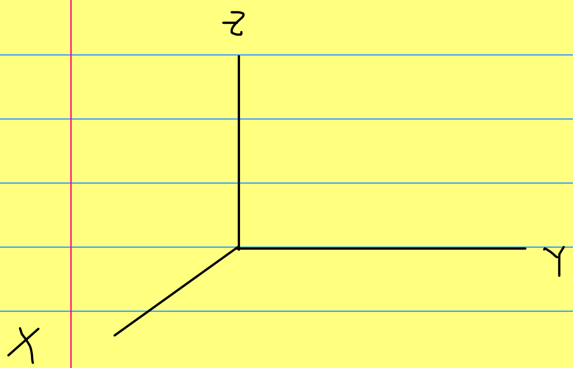
$1 = 0 + v_0 \to \boxed{v_0 = 1}$

(f) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$

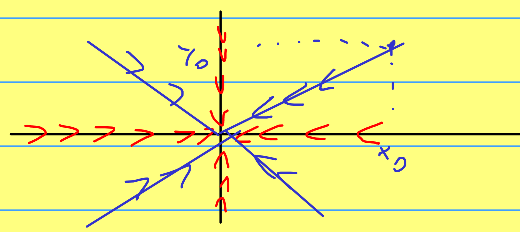
$x(t) = x_0 e^{-t}$

$y(t) = x_0 e^{-t}$

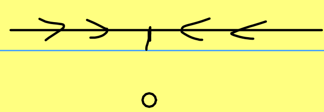
$\boxed{z(t) = z_0 e^{t}}$

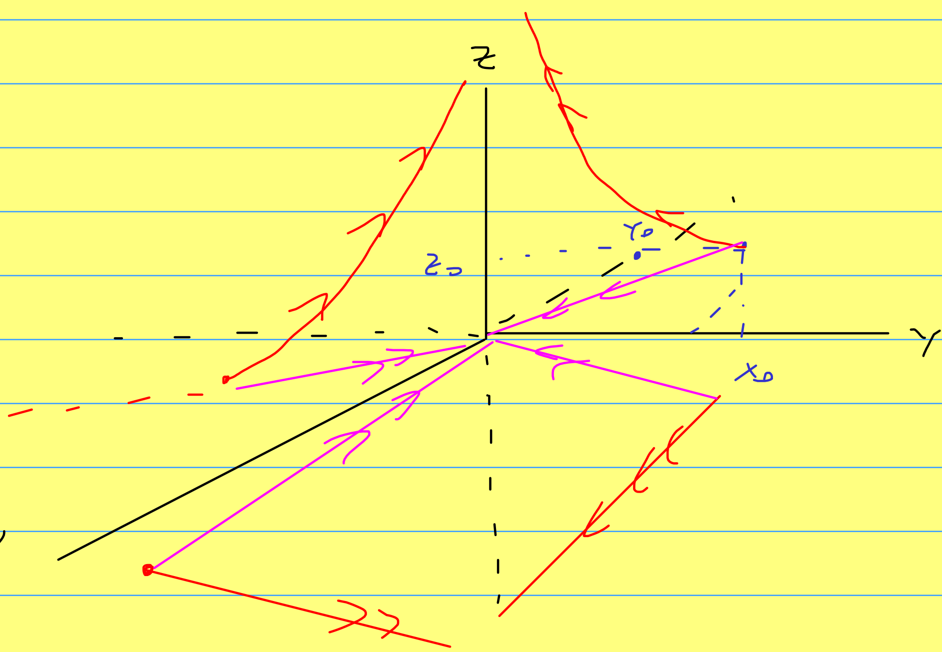


$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{aligned}$



$x' = -x$





$y(t) = z_0 e^{t}$

3. (a) Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \boxed{\lambda = \pm i}$$

i) Probar que si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es solución de la ecuación entonces $x^2(t) + y^2(t) = cte$.

ii) A partir de i), dibujar el diagrama de fase.

(b) A partir de la parte (a), dibujar el diagrama de fase del sistema lineal:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = -z \end{cases}$$

a) i) $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es solución de $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}}$$

$x^2 + y^2 = cte$ sii $(x^2+y^2)' = 0$

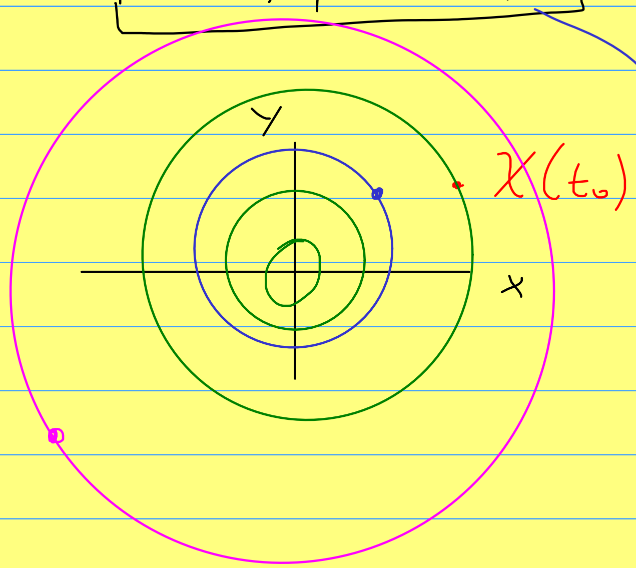
$$\begin{aligned} (x^2+y^2)' &= 2xx' + 2yy' \\ &= 2[xx' + yy'] \\ &= 2[-xy + yx] = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{x^2(t) + y^2(t) = cte}$

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

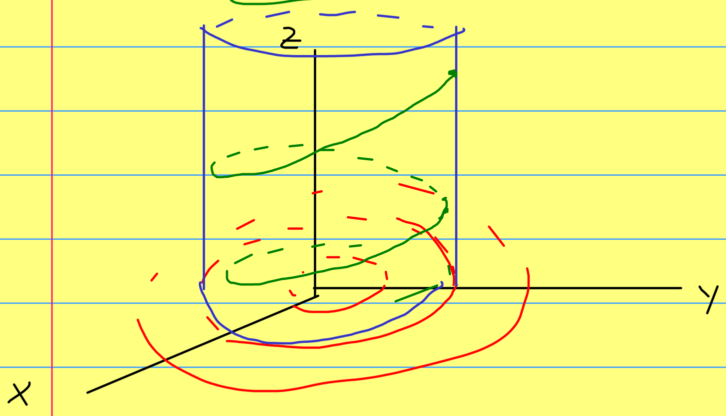
$\|X(t)\| = cte$

a. ii)



b)

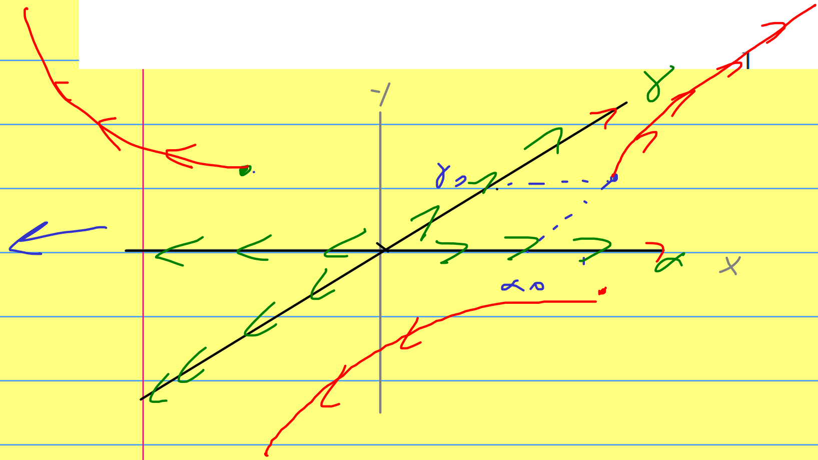
b) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ \boxed{z' = -z} \end{cases} \longrightarrow z(t) = z_0 e^{-t}$



5. Sea A una matriz 2×2, con valores propios reales λ y μ diferentes. Supongamos que $(0,1)$ y $(-1,1)$ son vectores propios asociados a los valores propios λ y μ respectivamente. Esquematizar el diagrama de fase para los siguientes casos:

(a) $0<\lambda<\mu \to e^{\lambda t} < e^{\mu t}$ (b) $0<\mu<\lambda$ (c) $\lambda<\mu<0$

(d) $\lambda<0<\mu$ (e) $\mu<0<\lambda$ (f) $0=\lambda, \mu>0$



$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} \alpha' = \lambda \alpha & \to \alpha(t) = \alpha_0 e^{\lambda t} \\ \gamma' = \mu \gamma & \to \gamma(t) = \gamma_0 e^{\mu t} \end{cases}$$