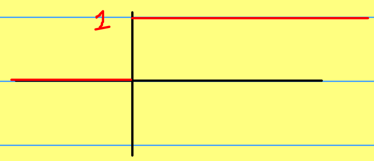
20/8

• Dada una función $f(t)$ definimos su transformada de Laplace como:

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

• $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$



$$\mathcal{L}[H(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} e^{-st}\, dt$$

$u = st \to du = s\, dt$

$u(0) = 0$

$u(b) = sb$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{s} \int_0^{sb} e^{-u}\, du$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{s} \left(-e^{-u} \Big|_0^{sb} \right)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{s} \left[-e^{-sb} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{s} \left(\underbrace{\lim_{b \to +\infty} -e^{-sb}}_{0} + \overbrace{\lim_{b \to +\infty} 1}^{1} \right)$$

$$= \frac{1}{s}$$

2. a) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s-\alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e^{\alpha t}$, donde α es cualquier número complejo fijo. Este resultado se llama "propiedad de traslación en frecuencia".

Si $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ entonces

$$F(s-\alpha) = \mathcal{L}[f(t)e^{\alpha t}](s)$$

• Queremos calcular $\mathcal{L}[e^{\alpha t}](s)$

$e^{\alpha t} = H(t)e^{\alpha t}$ vale en el contexto de transformada de Laplace.

$\mathcal{L}[e^{\alpha t}](s) = \mathcal{L}[H(t)e^{\alpha t}](s)$

$F(s) = \mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}[e^{\alpha t}](s) = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$

d) Dada una función f, probar que la transformada de Laplace de su derivada $f'(t)$ satisface la identidad:

$$\boxed{(\mathcal{L}(f'))(s) = s(\mathcal{L}(f))(s) - f(0).}$$

$f(t) = \cos(t) = (\operatorname{sen}(t))'$

$\mathcal{L}[\cos(t)](s) = s\,\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)] - \operatorname{sen}(0)$

• Obs: La transformada de Laplace es lineal.

$\mathcal{L}[af(t) + g(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + \mathcal{L}[g(t)](s)$

$a \in \mathbb{C}$

f) Admitiendo que la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ es derivable como función de variable s, y que al derivar respecto a s la integral impropia que define $F(s)$ es igual a la integral impropia de la función que se obtiene derivando dentro de la integral, deducir que:

$$\boxed{F'(s) = (\mathcal{L}[-tf(t)])(s)}$$

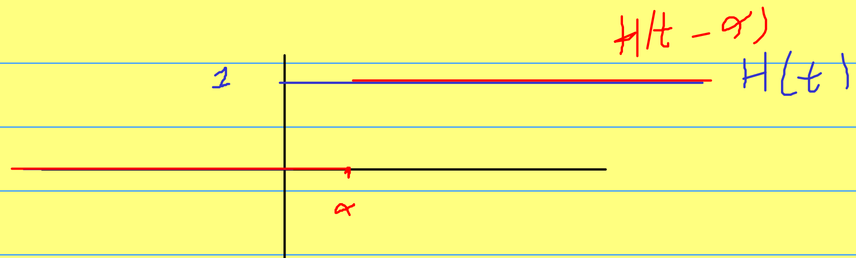
$$F'(s) = \frac{dF}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(f(t)\,e^{-st}\right)dt$$

Nuevo

(xi) $H(t-\alpha)$ para $\alpha > 0$ constante.

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$H(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-\alpha \geq 0 \\ 0 & \text{si } t-\alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \alpha \\ 0 & \text{si } t < \alpha \end{cases}$$



$$\mathcal{L}[H(t-\alpha)](s) = \int_0^{+\infty} H(t-\alpha)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{\alpha} \overbrace{H(t-\alpha)}^{0}\,e^{-st}\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \overbrace{H(t-\alpha)}^{1}\,e^{-st}\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-st}\,dt$$

$u = st \to du = s\,dt$

$u(\alpha) = s\alpha$

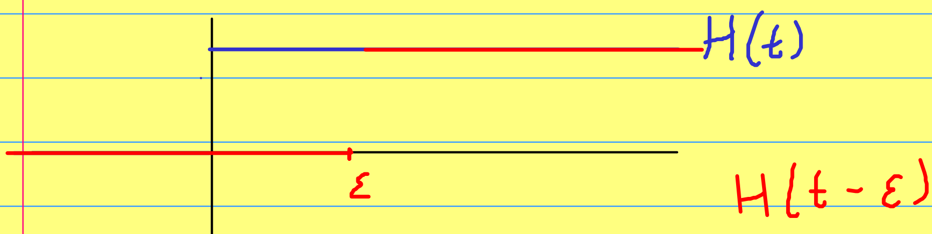
$u(+\infty) = +\infty$

$$= \frac{1}{s}\int_{s\alpha}^{+\infty} e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{s}\left[-e^{-u}\Big|_{s\alpha}^{+\infty}\right] = \frac{e^{-s\alpha}}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[H(t-\alpha)](s) = \frac{e^{-s\alpha}}{s}}$$

(xii) $P_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\epsilon}(H(t) - H(t-\epsilon))$ (para $\epsilon > 0$ muy pequeño).



$$H(t) - H(t-\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < \varepsilon \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ó } \varepsilon \le t \end{cases}$$

$$P_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } 0 \le t < \varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[P_\varepsilon(t)](s) = \int_0^{+\infty} P_\varepsilon(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st}\, dt$$

<u>otra forma</u> Linealidad:

$$\mathcal{L}[P_\varepsilon(t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\varepsilon}[H(t) - H(t-\varepsilon)]\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathcal{L}[H(t)] - \mathcal{L}[H(t-\varepsilon)] \right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-\varepsilon s}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

b) Se define la transformada de Laplace de la Delta de Dirac como el límite (este sí existe) siguiente:

$$(\mathcal{L}\delta)(s) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (\mathcal{L}(P_\epsilon(t))(s)$$

Hallar la transformada de Laplace de la Delta de Dirac y agregarla a la tabla del ejercicio anterior.

$$\mathcal{L}[\delta](s) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{L}[P_\varepsilon(t)](s)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hôpital: $= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\cancel{s}\, e^{-\varepsilon s}}{\cancel{s}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{-\varepsilon s} = 1$

5. Usar la siguiente fórmula de la transformada de Laplace de una función períodica $f(t)$ con período c:

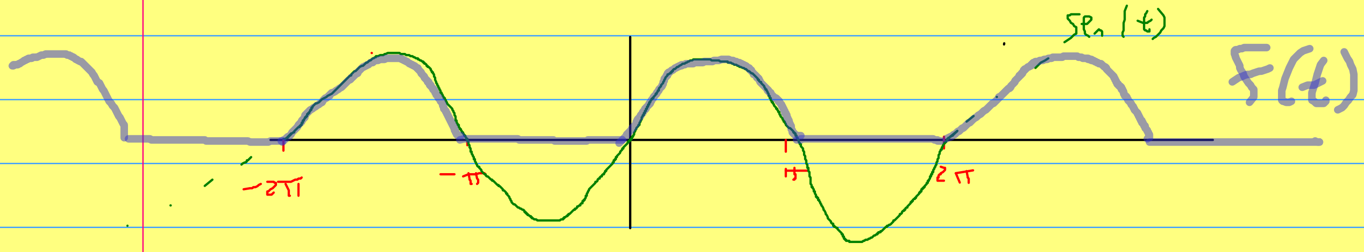
$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-cs}} \int_0^c f(t)e^{-st}dt,$$

para encontrar la transformada de *la onda semi-rectificada* :

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{si } \operatorname{sen} t > 0 \\ 0 & \text{si } \operatorname{sen} t \leq 0 \end{cases}}$$

Graficar la onda semi-rectificada en función del tiempo.

Nota: Esta es la forma de una corriente alterna (i.e. sinusoidal) después de pasar por un diodo.



En este caso el periodo es $c = 2\pi$.

7. $a)$ $f'' - 4f' + 3f = 1$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

1) Aplicar Laplace en ambos lados

$$\mathcal{L}[f'' - 4f' + 3f] = \mathcal{L}[1] \longrightarrow \text{Recordar } 1 = H(t)$$

$$\mathcal{L}[1] = 1/s$$

$$\mathcal{L}[f''] - 4\mathcal{L}[f'] + 3\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s}$$

2) Usar que

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - \cancel{f(0)} \to 0$$

$$\mathcal{L}[f''] = s\mathcal{L}[f'] - \cancel{f'(0)} \to 0$$

$$= s[s\mathcal{L}[f] - \cancel{f(0)}] = s^2\mathcal{L}[f]$$

$$s^2\mathcal{L}[f] - 4s\mathcal{L}[f] + 3\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[f](s^2 - 4s + 3) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{1}{(s^2 - 4s + 3)\, s}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g] \\ \Downarrow \\ f = g\end{array}}$$

3) Fracciones simples

$$s^2 - 4s + 3 = 0 \to s = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1 \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$s^2 - 4s + 3 = (s-1)(s-3)$$

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{(s-2)(s-3)s} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s}$$

$$= \frac{A(s-3)s + B(s-2)s + C(s-2)(s-3)}{(s-2)(s-3)s}$$

Necesariamente $1 = A(s^2-3s) + B(s^2-s) + C(s^2-4s+3)$

$$= s^2[A+B+C] + s[-3A-B-4C] + 3C$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ -3A-B-4C = 0 \\ 3C = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{C = 1/3}$$

$$\begin{cases} A+B = -1/3 & (i) \\ -3A-B = 4/3 & (ii) \end{cases}$$

$(i)+(ii)$: $-2A = \frac{3}{3} = 1 \rightarrow -2A = 1 \rightarrow \boxed{A = -1/2}$

$B = -\frac{1}{3} - A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} \rightarrow \boxed{B = +1/6}$

$$\mathcal{L}[f] = \frac{-1/2}{s-1} + \frac{1/6}{s-3} + \frac{1/3}{s}$$

$\mathcal{L}\left[-\frac{e^t}{2}\right]$ $\mathcal{L}\left[\frac{e^{3t}}{6}\right]$ $\mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\right]$

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}\left[-\frac{e^t}{2} + \frac{e^{3t}}{6} + \frac{1}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = -\frac{e^t}{2} + \frac{e^{3t}}{6} + \frac{1}{3}}$$

a) $\mathcal{L}[f * g] = \overbrace{\mathcal{L}[f]}^{\frac{1}{s}} \overbrace{\mathcal{L}[g]}^{\frac{1}{s-1}}$