18/8

a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0.$

1) $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \to \lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{-1}\sqrt{4}}{2}$ i 1

Las raices son $-1 \pm i$

$$\boxed{Y_H(x) = \underbrace{C_1}_{1} e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t} \operatorname{sen}(t)}$$

$Y_H(0) = C_1 \to \boxed{C_1 = 1}$

$\quad \shortparallel$

$\quad 1$

$$Y_H'(x) = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t) - C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(t) + C_2 e^{-t}\cos(t)$$
$$= e^{-t}\cos(t)[-1 + C_2] + e^{-t}\operatorname{sen}(t)[-1 - C_2]$$

$Y'(0) = -1 + C_2 \to \boxed{C_2 = 1}$

$\quad \shortparallel$

$\quad 0$

$$\boxed{Y_H(x) = e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\operatorname{sen}(x)}$$

2) Variación de constantes: $Y_P(x) = K(x)\, Y_H(x)$

a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0.$

$Y_P(x) = K(x)\, e^{-x}[\cos(x) + \operatorname{sen}(x)]$

$$y_p'(x) = K'(x)e^{-x}[\cos(x)+\operatorname{sen}(x)] - K(x)e^{-x}[\cos(x)+\operatorname{sen}(x)]$$
$$+K(x)e^{-x}[-\operatorname{sen}(x)+\cos(x)]$$
$$= e^{-x}K(x)[-\cancel{\cos(x)} \overbrace{-\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)}^{-2\operatorname{sen}(x)} + \cancel{\cos(x)}]$$
$$+K'(x)e^{-x}[\cos(x)+\operatorname{sen}(x)]$$
$$= -2e^{-x}K(x)\operatorname{sen}(x) + K'(x)e^{-x}\{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\}$$

$$y_p''(x) = 2e^{-x}K(x)\operatorname{sen}(x) - 2e^{-x}K'(x)\operatorname{sen}(x) - 2e^{-x}K(x)\cos(x)$$
$$+K''(x)e^{-x}[\cos(x)+\operatorname{sen}(x)] - K'e^{-x}\{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\}$$
$$+K'(x)e^{-x}[-\operatorname{sen}(x)+\cos(x)]$$

$$= e^{-x}K(x)[2\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x)]$$
$$+ e^{-x}K'(x)[-2\operatorname{sen}(x) - \cancel{\cos(x)} - \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) + \cancel{\cos(x)}]$$
$$+ e^{-x}K''(x)[\cos(x)+\operatorname{sen}(x)]$$

$$= 2e^{-x}K(x)[\operatorname{sen}(x)-\cos(x)] - 4e^{-x}K'(x)\operatorname{sen}(x)$$
$$+ e^{-x}K''(x)[\cos(x)+\operatorname{sen}(x)]$$

Al meter todo en la ecuación conseguimos una ecuación diferencial en K, resolviéndola hallamos $K(x)$.

Ej: $x' + x = e^{3t}$

$$x'+x=0 \to x'=-x \to x_H(t) = e^{-t}$$

$$x_p(t) = K(t)x_H(t) = K(t)e^{-t}$$

$$x_p' = K'(t)e^{-t} \underbrace{- K(t)e^{-t}}_{-x_p(t)}$$

Queremos

$$x_p' + x = K'(t)e^{-t} - \cancel{K(t)e^{-t}} + \cancel{K(t)e^{-t}} = e^{3t}$$

$$K'(t)\, e^{-t} = e^{3t}$$

$$\boxed{K'(t) = e^{4t}}$$

$$K(t) = \int e^{4t}\, dt = \frac{1}{4} e^{4t}$$

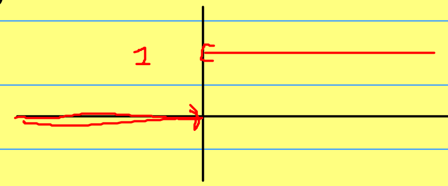
$$x_p(t) = \frac{1}{4} e^{4t}\, e^{-t} = \frac{e^{3t}}{4}$$

Práctico 2

Dado $f(t)$, la transformada de Laplace de f es

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$s \in \mathbb{C}$.



1. Encontrar la transformada de Laplace de $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \int_0^{r} e^{-st}\,dt$$

$u = st \to du = s\,dt$
$u(0) = 0$ y $u(r) = sr$

$$= \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{s} \int_0^{sr} e^{-u}\,du$$

$$= \lim_{r \to +\infty} -\frac{1}{s}\, e^{-u}\Big|_0^{sr} = \lim_{r \to +\infty} -\frac{1}{s}\left[e^{-sr} - 1\right]$$

• Obs: $Re(s) > 0$

$$= \underbrace{\boxed{\lim_{r \to +\infty} -\frac{e^{-sr}}{s}}}_{=0} + \boxed{\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{s}} = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}}$$

2. *a*) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s-\alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e^{\alpha t}$, donde α es cualquier número complejo fijo. Este resultado se llama "propiedad de traslación en frecuencia".

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$$

Hay que probar que $F(s-\alpha) = \mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(s)$

$$\mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(s) = \int_0^{+\infty} (f(t)e^{\alpha t})\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{(\alpha - s)t}\, dt$$

$\alpha - s$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \Rightarrow F(s-\alpha) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(s-\alpha)t}\, dt$$

• Si $f(t) = H(t) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}$

$$f(t)e^{\alpha t} = H(t)e^{\alpha t} = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(H(t)e^{\alpha t}) = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$$

Si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \Rightarrow F(s-\alpha) = \mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(s)$

Obs: $H(t)\, e^{\alpha t} = e^{\alpha t}$ sólo en transformada de Laplace.

b) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s)\cdot e^{-as}$ es la transformada de $f(t-a)$, donde a es un número real fijo, y $f(t)=0$ para todo real $t<0$ y también para todo $t<a$. Este resultado se llama "propiedad de traslación en el tiempo".

$$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)$$

Tenemos que probar que $F(s)e^{-as}=\mathcal{L}(f(t-a))(s)$

$$F(s)e^{-as}=\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right)e^{-as}$$

$$=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}e^{-as}\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-s(t+a)}\,dt$$

$$\mathcal{L}(f(t-a))(s) = \int_0^{+\infty} f(t-a)\,e^{-st}\,dt$$

$u=t+a \to du=dt$

$u(0)=a$

$u(+\infty)=+\infty$

$t=u-a$

$$=\int_a^{+\infty} f(u-a)\,e^{-su}\,du+0=\int_0^{+\infty} f(u-a)\,e^{-su}\,du$$

$$0=\int_0^{a} f(u-a)\,e^{-su}\,du$$ ya que $f(t)=0\ \forall t<a$

$f(u-a)=0\ \forall u<a$

Obs: $\mathcal{L}(\alpha f(t) + g(t))(s)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$= \alpha \mathcal{L}(f(t))(s) + \mathcal{L}(g(t))(s)$$

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + g(t))(s) = \int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + g(t))\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \alpha f(t) e^{-st} + g(t) e^{-st}\, dt$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt + \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st}\, dt$$

$$= \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(g)(s)$$

c) Usando las partes a) y b) y la linealidad de la transformada de Laplace, calcular la transformada de:

$$f(t) = H(t)\,\mathrm{senh}(at) = H(t)\,\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}.$$

a) $F(s) = \mathcal{L}(f)(s) \Rightarrow F(s-\alpha) = \mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(s)$

b) $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \Rightarrow F(s)e^{-\alpha s} = \mathcal{L}(f(t-\alpha))(s)$

$$\mathcal{L}(H(t)\,\mathrm{senh}(at))(s) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \overset{e^{(a-s)t}}{e^{at}e^{-st}} - \overset{e^{-(a+s)t}}{e^{-at}e^{-st}}\, dt$$

$$\int e^{\overset{b}{-at}} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s-b} = \frac{1}{s+a}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{(-a-s)t}\,dt\right]$$

Si $f(t)=e^{at} \Rightarrow \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}$ (parte a)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\overbrace{s+a-s+a}^{\cancel{2}a}}{s^2-a^2}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\operatorname{senh}(at))(s) = \frac{a}{s^2-a^2}}$$

d) Dada una función f, probar que la transformada de Laplace de su derivada $f'(t)$ satisface la identidad:

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$(\mathcal{L}(f'))(s) = s(\mathcal{L}(f))(s) \ - \ f(0).$$

$$\int f g' = fg - \int f' g$$

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,\overbrace{e^{-st}}^{g}\,dt$$

$$g(t) = e^{-st} \rightarrow g'(t) = -se^{-st}$$

Aplicamos partes:

$$s\,\mathcal{L}(f)(s)$$

$$\mathcal{L}(f')(s) = f(t)\,e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= s\,\mathcal{L}(f)(s) + \underbrace{\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t)\,e^{-st}}}_{=0} - \underbrace{\boxed{f(0)\,e^{0}}}_{=f(0)}$$

↳ Las funciones transformables se portan bien en infinito

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(s) = s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)}$$

e) Usando las partes *c*) y *d*) encontrar la transformada de Laplace de:

$$\frac{1}{a}\cdot\left(H(t)\,\mathrm{senh}(at)\right)' = \boxed{H(t)\cosh(at)} = H(t)\,\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}.$$

c) $\mathcal{L}(H(t)\,\mathrm{senh}(at)) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$

d) $\mathcal{L}(f') = s\,\mathcal{L}(f) - f(0)$

$$\mathcal{L}(H(t)\cosh(at)) = s\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{a}H(t)\,\mathrm{senh}(at)\right) - \frac{1}{a}\overset{1}{H(0)}\,\overset{0}{\mathrm{senh}(0)}$$

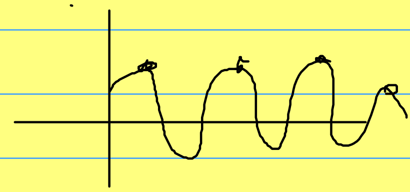
$$= \frac{s}{a}\,\mathcal{L}(H(t)\,\mathrm{senh}(at)) = \frac{s}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}}{s^2-a^2} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(H(t)\cosh(at))(s) = \frac{s}{s^2-a^2}}$$

4) Buscar $x' = f(x)$ cuya solución tenga al menos un máximo local estricto.

Si la solución es $x(t) = \text{sen}(t)$, la ecuación diferencial es:

$$x' = \cos(x)$$



---

f) Admitiendo que la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ es derivable como función de variable s, y que al derivar respecto a s la integral impropia que define $F(s)$ es igual a la integral impropia de la función que se obtiene derivando dentro de la integral, deducir que:

$$F'(s) = (\mathcal{L}[-tf(t)])(s)$$

g) Usando las partes *a*) y *f*) encontrar la transformada de $f(t) = H(t)e^{2t}\,t^2$.

$$= -t\,(\underbrace{-H(t)e^{2t}t}_{g(t)})$$

$$f(t) = -t\,g(t) = -t(-t\,j(t))$$

$$= -t(-t)(\underbrace{H(t)e^{2t}}_{j(t)})$$

$$F(s) = \mathcal{L}(j)(s) = \frac{1}{s-2} \rightarrow \mathcal{L}(-tj) = F'(s) = \frac{0(s-2) - 1(1)}{(s-2)^2}$$

$$= \frac{-1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(-t(-tj)) = F''(s) = \frac{0(s-2)^2 - 1(2(s-2))}{(s-2)^4}$$

$$= \frac{2(2-5)}{(5-2)^4} = \frac{4-25}{(5-2)^4}$$