13/8

7. Sea la ecuación diferencial lineal $y' = p(x) + q(x)y$. Supongamos que ϕ_1 y ϕ_2 son dos soluciones. Demostrar que toda otra solución se escribe $\phi = \phi_1 + C(\phi_2 - \phi_1)$, donde C es una constante.

$$\phi_1' = p(x) + q(x)\phi_1$$

$$\phi_2' = p(x) + q(x)\phi_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\phi_2' - \phi_1'}_{h'} = q(x)[\underbrace{\phi_2 - \phi_1}_{h}]$$

Sea $h = \phi_2 - \phi_1 \to h' = \phi_2' - \phi_1'$

$$\boxed{h' = q(x)h} \to \phi_2 - \phi_1 \text{ es solución de la homogenea}$$

$$\boxed{\frac{h'}{h} = q(x)}$$

$$y' = p(x) + q(x)y$$

$$y' = p(x) + \frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} y$$

$\vdots$

- Sabiendo que toda solución se puede escribir como $\phi = \phi_H + \phi_p$, probar que si $C \in \mathbb{R} \Rightarrow C(\phi_2 - \phi_1)$ es solución de la homogenea. Luego ϕ_1 (también ϕ_2) es solución particular.

$$\boxed{\bullet\ \phi_2 = \phi_H + \phi_1 \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = \phi_H}$$

$$\bullet\ \left[C(\phi_2 - \phi_1)\right]' = C(\phi_2' - \phi_1')$$

$$= C(p(x) + f(x)\phi_2 - p(x) - f(x)\phi_1)$$

$$= C\ f(x)(\phi_2 - \phi_1)$$

$$= f(x)\ C(\phi_2 - \phi_1)$$

$\Rightarrow C(\phi_2 - \phi_1)$ es solución de $y' = f(x)y$

8. La ecuación

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

que se conoce como ecuación de Bernoulli, es lineal para $n = 0$ y $n = 1$. Probar que utilizando el cambio de variable $z = y^{1-n}$ se puede reducir a una ecuación lineal, cualquiera sea n, y aplicar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

$x \neq 0$

$y \neq 0$

Si $xy^2 \neq 0$

$$xy^2y' + y^3 = x\cos x$$

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{\cos x}_{Q(x)}\, y^{-2}$$

$\rightarrow n = -2$

$$z = y^{1-n} = y^{1-(-2)} = y^3$$

$$z' = 3y^2y' \rightarrow y' = \frac{z'}{3} y^{-2}$$

$$\frac{z'}{3} y^{-2} + P(x)y = Q(x)y^{-2}$$

El inverso de $\frac{y^{-2}}{3}$ es $\frac{3}{y^{-2}} = 3y^2$

$$z' + 3P(x)\underbrace{y^2y}_{y^3} = 3Q(x)\underbrace{y^{-2}y^2}_{1}$$

$$\boxed{z' + 3P(x)z = 3Q(x)}$$

• z_H: $z' + 3P(x)z = 0$

$$z' = -3P(x)z$$

$$\frac{z'}{z} = -3P(x)$$

$$\int \frac{z'}{z}\,dx = -3\int \frac{1}{x}\,dx$$

dz

$$\int \frac{1}{z}\,dz = -3\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln(|z(x)|) = -3\ln(|x|) + K \qquad a^b = e^{b\ln(a)}$$

$$\boxed{|z(x)| = |x|^{-3}\cdot e^{K}} \qquad e^{-3\ln(|x|)} = a^b$$

- Como $x \neq 0 \Rightarrow |z(x)| = x^{-3}e^{K}$

ó

$$|z(x)| = (-x)^{-3}\, e^{K}$$

$\Rightarrow$ Como $z(x) \neq 0$ y es continua (pues $x \neq 0$)

$$z(x) = x^{-3}e^{K} \quad \text{ó} \quad z(x) = -x^{-3}e^{K}$$

La solución homogénea es $z_H(x) = \dfrac{e^{K}}{x^3}$ K

- Sí: $z' + 3\frac{1}{x}z = 3\cos(x) \Rightarrow x z' + 3z = 3x\cos(x)$

Variación de constantes: $\quad z(x) = K(x)\, x^{-3}$

$$z' = K' x^{-3} - 3Kx^{-4}$$

$$\frac{z}{x} = Kx^{-4}$$

$$z' + \frac{3}{x}z = K'x^{-3} \underbrace{-3Kx^{-4} + 3Kx^{-4}}_{=0}$$

$$K'(x) = 3x^3 \cos(x)$$

$f = x^3 \to f' = 3x^2$

$g' = \cos(x) \to g = \operatorname{sen}(x)$

$\int f g' = f g - \int f' g$

$$K(x) = 3\int K'\, dx = 3\int \overbrace{x^3}^{f}\, \overbrace{\cos(x)}^{g'}\, dx$$

$f' = 2x$

$g = -\cos(x)$

$$3\int x^3 \cos(x)\, dx = x^3 \operatorname{sen}(x) - 3\int \overbrace{x^2}^{f}\, \overbrace{\operatorname{sen}(x)}^{g'}\, dx =$$

$f' = 1$

$g = \operatorname{sen}(x)$

$$= x^3 \operatorname{sen}(x) - 3\left[-x^2\cos(x) + 2\int \overbrace{x}^{f}\, \overbrace{\cos(x)}^{g'}\, dx\right]$$

$$= x^3 \operatorname{sen}(x) + 3x^2\cos(x) - 6\left[x \operatorname{sen}(x) - \overbrace{\int \operatorname{sen}(x)\, dx}^{-\cos(x)}\right]$$

$$= x^3 \operatorname{sen}(x) + 3x^2 \cos(x) - 6x \operatorname{sen}(x) - 6\cos(x)$$

$$= 3\left((x^3 - 6x)\operatorname{sen}(x) + (3x^2 - 6)\cos(x)\right)$$

$$z_p(x) = 3\left[(x^3 - 6x)\operatorname{sen}(x) + (3x^2 - 6)\cos(x)\right] \cdot x^{-3}$$

$$= 3\left((1 - 6x^{-2})\operatorname{sen}(x) + (3x^{-2} - 6x^{-3})\cos(x)\right)$$

$$\Rightarrow z(x) = K x^{-3} + 3\left((1 - 6x^{-2})\operatorname{sen}(x) + (3x^{-2} - 6x^{-3})\cos(x)\right)$$

$$z(x) = y^3(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{K x^{-3} + 3(1 - 6x^{-2})\operatorname{sen}(x) + 3(3x^{-2} - 6x^{-3})\cos(x)}$$

12. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea solución de la ecuación $y'' + ay' + 2y = 0$ y determinar la solución general de la ecuación.

$$y'' + ay' + 2y = 0 \to e^x + ae^x + 2e^x = 0$$

$$\cancel{e^x}\,\underbrace{[1 + a + 2]}_{1 + a + 2 = 0} = 0$$

$$\boxed{a = -3}$$

I

13. Hallar $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^{2x}\cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Hallar la solución de la ecuación que verifica $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

II

I) $y' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\operatorname{sen} x = e^{2x}(2\cos x - \operatorname{sen} x)$

$y'' = 4e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\operatorname{sen} x - 2e^{2x}\operatorname{sen} x - e^{2x}\cos x$

$= (4-1)e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\operatorname{sen} x = e^{2x}(3\cos x - 4\operatorname{sen} x)$

$$e^{2x}(3\cos x - 4\operatorname{sen} x) + a(e^{2x}(2\cos x - \operatorname{sen} x)) + b\,e^{2x}\cos x = 0$$

$$\cancel{e^{2x}}\,[3\cos x - 4\operatorname{sen} x + 2a\cos x - a\operatorname{sen} x + b\cos x] = 0$$

$\Rightarrow \quad \cos(x)(3 + 2a + b) + \operatorname{sen}(x)(-4 - a) = 0$

Como esta ecuación tiene que valer $\forall x$, necesariamente

$$\begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ -4 - a = 0 \to \boxed{a = -4} \end{cases}$$

$3 - 8 + b = 0$

$-5 + b = 0 \to \boxed{b = 5}$

II) Encontrar la solución

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

• El polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{\frac{-4}{4}}$$

$$= 2 \pm \sqrt{-1}$$

$$= \underbrace{2}_{\alpha} \pm \underbrace{1}_{\beta} i$$

Como las raíces son complejas, la solución es:

$$y(x) = \cancel{C_1}\, e^{2x} \cos(x) + C_2 e^{2x} \operatorname{sen}(x)$$

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{y(0)} = C_1 \overbrace{e^0}^{1} \overbrace{\cos(0)}^{1} + C_2 \overbrace{e^0}^{1} \overbrace{\operatorname{sen}(0)}^{0} = C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = 1}$$

$$y'(x) = 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\cancel{\operatorname{sen}}(x) + 2C_2 e^{2x}\cancel{\operatorname{sen}}(x) + C_2 e^{2x}\cos(x)$$

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{y'(0)} = 2 + C_2 \rightarrow 1 = 2 + C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = -1}$$

La solución es

$$y(x) = e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\operatorname{sen}(x)$$
$$= e^{2x}(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$$

14. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que las ecuaciones diferenciales $\underbrace{y''+ay'-2y=0}_{\mathrm{I}}$ y $\underbrace{y''-2y'+ay=0}_{\mathrm{II}}$ tengan soluciones en común además de $y(x)=0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

A priori: $a=-2$

• $p_{\mathrm{I}} = \lambda^2 + a\lambda - 2$, $p_{\mathrm{II}} = \lambda^2 - 2\lambda + a$

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \qquad C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\gamma x}$$

• Si solo nos interesa que compartan soluciones para alguna condición inicial, nos alcanza con que tengan una raíz común.

• Si queremos que valga para todas las condiciones iniciales entonces es necesario que ambas raíces sean iguales.

$\lambda^2 + a\lambda - 2$ $\qquad$ $\lambda^2 - 2\lambda + a$

• Si α, β son raíces
$$\lambda^2 + a\lambda - 2 = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$
$$\parallel$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + a = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

$$\lambda^2 + a\lambda - 2 = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) = \lambda^2 - 2\lambda + a$$

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-8}}{2} \quad , \quad \frac{2 \pm \sqrt{4-4a}}{2} = \frac{2}{2} \pm \_\_\_$$

$$= \frac{-a}{2} \pm \_\_\_$$

Si las raíces son complejas α y $\bar{\alpha}$

$$\lambda^2 + a\lambda - 2 = (\lambda - \alpha)(\lambda - \bar{\alpha}) = \lambda^2 - 2\lambda + a$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \to \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \to \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{\frac{8}{4}}$$

14. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que las ecuaciones diferenciales $y'' + ay' - 2y = 0$ y $y'' - 2y' + ay = 0$ tengan soluciones en común además de $y(x) = 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

$$y'' + ay' - 2y = y'' - 2y' + ay$$

$$(a+2)y' - (a+2)y = 0$$

$$(a+2)(y' - y) = 0 \to y' = y$$

$$\hookrightarrow a + 2 = 0 \to \boxed{a = -2}$$

Si $y' = y \to y(x) = C_1 e^{x} + \ldots e^{\gamma x}$