22/10

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = (\overbrace{x^2+y^2}^{r^2})x + y \\ \dot{y} = (\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})y - x \end{cases}$$

Tenemos $\begin{cases} \dot{x} = * \\ \dot{y} = * \end{cases} \xrightarrow[\text{Aplicar polares}]{} \begin{cases} \dot{r} = * \\ \dot{\theta} = * \end{cases}$

$x = r\cos\theta$, $\underbrace{x^2+y^2 = r^2}$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

• $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2r\dot{r}$

$x(r^2x+y) + y(r^2y-x) = r\dot{r}$

$x^2r^2 + \cancel{xy} + y^2r^2 - \cancel{xy} = r\dot{r}$

$r^2(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}) = r\dot{r} \to r^4 = r\dot{r} \to \boxed{\dot{r} = r^3}$

$x = r\cos\theta$

$\dot{x} = \underbrace{\dot{r}}_{r^3}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \to \dot{x} = r^3\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\dot{x} = r^2x + y \to r^2x + y = r^3\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = r^3\cos\theta - (r^2\overset{r\cos\theta}{x} + \overset{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{y})$

$r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = \cancel{r^3\cos\theta} - (\cancel{r^3\cos\theta} + r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

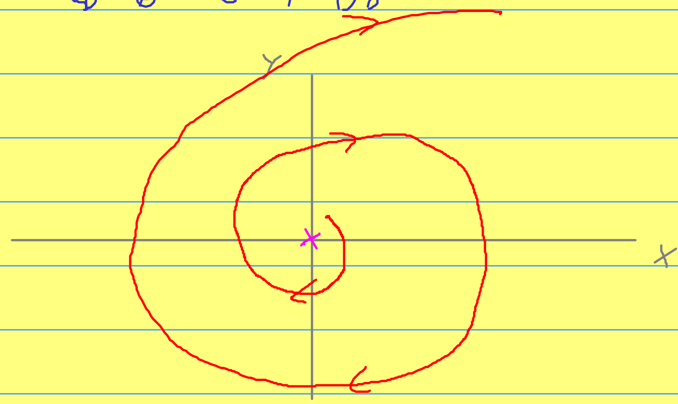
$r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta$

• Si $r = 0$: Punto de equilibrio $(0,0)$

. Si $r \neq 0$: Si $\mathrm{sen}\,\theta \neq 0$: $\boxed{\dot{\theta} = -1}$

Si $\operatorname{sen}\theta = 0 \to \boxed{\theta = \pi}$

$$\begin{cases} \dot r = r^3 \\ \dot\theta = -1 \end{cases} \to \theta = -t + \theta_0$$



Práctico 6

$f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

<u>Def:</u> $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, decimos que converge puntualmente a una función f si:

$$\forall x_0 \in M \text{ fijo}, \quad \underbrace{\lim_n f_n(x_0) = f(x_0)}_{\forall x_0 \text{ fijo},\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \text{ tq } \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0(\varepsilon)}$$

$f_n \to f$

$f_n \xrightarrow{c.p.} f$

<u>Def:</u> $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0(\varepsilon)$ tq $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$
$\forall x \in M$
(al mismo tiempo)

$f_n \xrightarrow{c.u.} f, \qquad f_n \rightrightarrows f$

$$f_n \xrightarrow{c.p.} f$$

Prop: Si $\lim_{n} \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$

entonces $f_n \xrightarrow{c.u.} f$

Obs: c.u. implica c.p.

Prop: Si $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{c.u.} f \\ \{f_n\} \text{ son continuas} \end{array}\right\}$ f es continua

Ej: $\left.\begin{array}{l} \{f_n\} \text{ continuas} \\ f_n \xrightarrow{c.p.} f \end{array}\right\}$ f no continua

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) = x^n \\ x \in [0,1] = M \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_0 \text{ fijo,} \\ x_0 \in [0,1] \end{array} \Rightarrow \lim_{n} x_0^n = \begin{cases} 0 & x_0 \in [0,1) \\ 1 & x_0 = 1 \end{cases}$$

En este caso $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Obs: $\{f_n\}$ continuas, si $f_n \xrightarrow{c.u.} f$, necesariamente f es continua y

$A \Rightarrow B \sim \text{No } B \Rightarrow \text{No } A$

3. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente en cualquier intervalo compacto. ¿Es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

• $\underline{f_n \xrightarrow{c.p.} f}$: $x_0 \in [a,b]$, $\lim_n \frac{x_0}{n} = 0$, $f_n \xrightarrow{c.p.} 0$

• $\underline{f_n \xrightarrow{c.u.} 0}$:

$$\lim_n \boxed{\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - 0|} = 0$$

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{x}{n}\right| = \sup_{x\in[a,b]} \frac{|x|}{n} \leq \frac{K}{n}$$

Como $|x|$ es continua y $\boxed{[a,b] \text{ es compacto}}$ $\Big\}$ Tiene máximo, es decir $\exists\, K \geq 0$ tal que $|x| \leq K$

$$0 \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - 0| \leq \frac{K}{n} \xrightarrow[n]{} 0$$

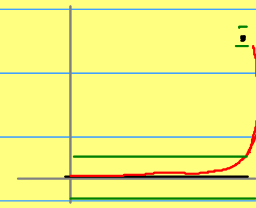
$$\Rightarrow \lim_n \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{c.u.} 0$$

• ¿Qué pasa si $f_n(x) = \frac{x}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| \text{ "="} \infty$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0(\varepsilon)$ tq $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0,\ \forall x \in M$

Interpretación geométrica de la c.u.



4. Consideremos la sucesión de funciones en $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

a) Calcular el límite puntual de las sucesiones f_n y f_n', a los que llamamos f y g respectivamente.

b) Probar que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

a) $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo: $\lim_n \frac{x_0}{1+nx_0^2} = 0$

Entonces $f_n \xrightarrow{c.p.} 0$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \to f_n'(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

x_0 fijo: $\lim_n \frac{1-nx_0^2}{(1+nx_0^2)^2} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 = 0 \\ 0 & \text{si } x_0 \neq 0 \end{cases}$

$$\lim_n \frac{1 - n x_0^2}{1 + 2n x_0^2 + n^2 x_0^4} \approx \lim_n \frac{-\cancel{n}\,\cancel{x_0^2}}{n^{\cancel{2}} x_0^{4\,2}} = \lim_n -\frac{1}{n x_0^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{c.p.} f \equiv 0 \\ f_n' \xrightarrow{c.p.} g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{array}\right\} \ g \neq f'$$

Obs: Si $f_n \xrightarrow{c.u.} f \Rightarrow f_n' \xrightarrow{c.u.} f'$
C^1

$$f_n(x) - f(x) = -\frac{1}{nx+1}$$

$x \in \mathbb{R}$: $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{-1}{nx+1} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{|nx+1|} = 1$

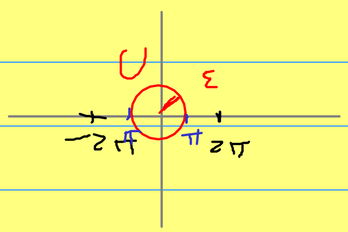
n fijo

$f_n'(x)$ nos dice si es creciente y decreciente.

Las ecuaciones para el péndulo amortiguado, en variables adimensionales, se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - \sin x. \end{cases}$$

1. Muestre que el origen es un punto fijo estable usando la función de energía $V(x,y) = 1/2y^2 + (1 - \cos x)$.



$\Rightarrow V(x,y) = \frac{y^2}{2} + (1 - \cos x)$

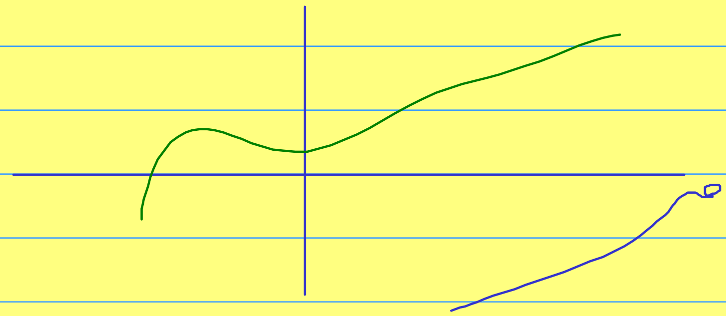
$V(0,0) = 0$ $\boxed{\begin{array}{l} x = n \\ x = 2n\pi \end{array}}$

$\dot{V} \leq 0$

b) $\dot{x} = x^2$ → $x(t) = f$

$\dot{y} = -y$ → $y(t) = g$ → Despejar t

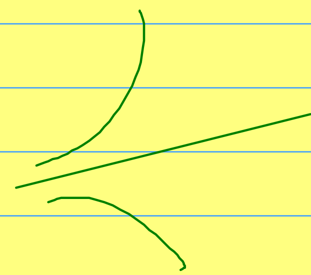
$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda x \\ y &= \mu y \end{aligned}\right.$$



$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$y(t) = y_0 e^{\mu t}$

$t = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \cdot \frac{1}{\mu}$



$x = \frac{x_0}{y_0^{\lambda/\mu}} \cdot y^{\frac{\lambda}{\mu}}$