- Ecuaciones lineales de orden 1.

$$x' + f(t)x = g(t) \qquad x' + 5x = e^t$$

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad y' + 5y = e^x$$

La solución es:

$$x(t) = Ke^{-\int f(t)\,dt} + e^{-\int f(t)\,dt}\int g(t)\, e^{\int f(t)\,dt}\,dt$$

Importante: Esta solución es valida sólo si la ecuación diferencial esta escrita:

$$x' + f(t)x = g(t)$$

Ej: a) $y' \overset{f(x)}{-3}y = \underset{g(x)}{e^x}$

$$y(x) = K\underbrace{e^{-\int -3\,dx}}_{e^{3x}} + \underbrace{e^{-\int -3\,dx}}_{e^{3x}}\int \underbrace{e^x \underbrace{e^{\int -3\,dx}}_{e^{-3x}}}_{e^{-2x}}\,dx$$

$$-\int -3\,dx = 3x$$

$$\int -3\,dx = -3x$$

$$\int e^{-2x}\frac{\overset{du}{2\,dx}}{2} = \frac{1}{2}\int e^{-u}\,du = -\frac{1}{2}e^{-u} = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$u = 2x \rightarrow du = 2\,dx$

Juntando todo: $y(x) = Ke^{3x} + e^{3x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$

$$= Ke^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}$$

La solución a $y' - 3y = e^{x}$

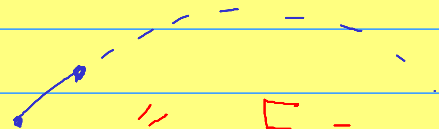
es $y(x) = Ke^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}$

$$y' = 3Ke^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}$$

$$y' - 3y = 3Ke^{3x} - \frac{1}{2}e^{x} - 3\left(Ke^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}\right)$$

$$= \cancel{3Ke^{3x}} - \cancel{3Ke^{3x}} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{3}{2}e^{x} = e^{x}$$

<u>Condiciones iniciales</u>



$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t - \dfrac{g t^2}{2} \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \to \quad mx'' = F = -mg$$

$$x'' = -g$$

Ej: $\begin{cases} y' - 3y = e^{x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

~~La solución a $y' - 3y = e^{x}$~~

es $y(x) = Ke^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}$

$$1 = y(0) = Ke^{0} - \frac{1}{2}e^{0} = K - \frac{1}{2} \to 1 = K - \frac{1}{2} \to \boxed{K = \frac{3}{2}}$$

La solución a $\begin{cases} y' - 3y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

es $y(x) = \frac{3}{2} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x$

Variable separables

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Ej: $y' = \text{sen}\left(e^{\text{arctg}(x)}\right) \cdot y$

$y' = 3y \rightarrow f(x) = 1$, $g(y) = 3y$ ó $f(x) = 3$, $g(y) = y$

$y' = \text{sen}(y^x)$ no es de variable separables

$$y' = f(y)\, g(x)$$

1°) $\dfrac{y'}{f(y)} = g(x)$ → Importante: Al hacer esto estamos descartando el caso $f(y) = 0$

2°) Integrar respecto a la variable independiente.

$y = y(x)$
$dy = y' dx$

$$\int \underbrace{\frac{y'}{f(y)} dx}_{dy} = \int g(x)\, dx$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\, dx$$

3°) De ser posible despejar $y(x)$

b) $(1+e^x)yy' = e^x$.

1°) $$yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

2°) $$\int y\underbrace{y'\,dx}_{dy} = \underbrace{\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx}_{\text{Poner acá la constante de integración}}$$

$$\underbrace{\int y\,dy}_{\frac{y^2}{2}} = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

Sea $u = 1+e^x \to du = e^x\,dx$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du + K$$
$$= \ln(|u|) + K$$
$$= \ln(|1+e^x|) + K$$
$$= \ln(1+e^x) + K$$

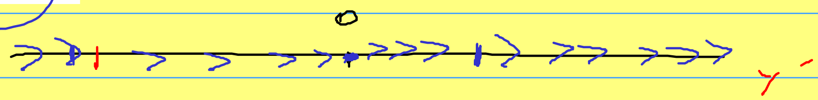
$$\frac{y^2(x)}{2} = \ln(1+e^x) + K$$

3°) $$y^2(x) = 2\ln(1+e^x) + 2K$$

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{2\ln(1+e^x) + 2K}}$$

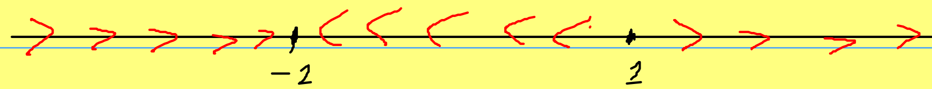
Diagrama de Fase.

a) $y' = y^2$.



$y' = 0$ si $y^2 = 0$ si $y = 0$

$y' = y^2 - 1$



$y' = 0$ si $y^2 - 1 = 0$ si $y = \pm 1$

2. Haciendo el cambio de variable $z = y/x^n$, y escogiendo un valor adecuado de n, demostrar que las ecuaciones diferenciales siguientes pueden transformarse en ecuaciones de variables separables, y resolverlas.

a) $y' = \dfrac{1 - xy^2}{2x^2 y}$. b) $y' = \dfrac{y - xy^2}{x + x^2 y}$.

$$z = \frac{y}{x^n} \rightarrow z' = \frac{y' x^n - y n x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$y' x^n - y n x^{n-1} = x^{2n} z'$$

$$y' x^n = x^{2n} z' + y n x^{n-1}$$

$$y' = x^n z' + \frac{y n}{x} \qquad x \neq 0$$

$$= \frac{1 - xy^2}{2x^2 y}$$

$$\frac{1 - xy^2}{2x^2 y} = x^2 z' + \frac{y}{x} z$$

$$z = \frac{y}{x^n} \rightarrow \boxed{n = 2} : \quad z = \frac{y}{x}, \quad y = zx$$

$$\frac{1 - x^3 z^2}{2x^3 z}$$

$$\frac{1 - x^3 z^2}{2x^3 z} = x z' + z$$

$$\frac{1 - x^3 z^2}{2x^3 z} - z = x z'$$

$$\frac{1 - x^3 z^2 - 2x^3 z^2}{2x^3 z} = x z'$$

$$\frac{1 - 3x^3 z^2}{2x^3 z} = x z'$$

8. La ecuación

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

que se conoce como ecuación de Bernoulli, es lineal para $n = 0$ y $n = 1$. Probar que utilizando el cambio de variable $z = y^{1-n}$ se puede reducir a una ecuación lineal, cualquiera sea n, y aplicar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $xy' + y = x^4y^3$.

b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

c) $xy' + y = xy^2$.

d) $-2y' = xy^3 + y$ con $y(1) = 0$.

e) $-2y' = xy^3 + y$ con $y(1) = -1$.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$z = y^{1-n} \to z' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$$

$$y' = \frac{z' y^n}{1-n}$$

$$z' + P(x)z = Q(x)$$

$n \neq 1$

$$\frac{z' y^n}{1-n} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$z' + P(x)\frac{y}{y^n}(1-n) = \overbrace{Q(x)\cancel{y^n}\frac{1-n}{\cancel{y^n}}}^{Q(x)(1-n)}$$

$$\frac{y}{y^n} = y^{1-n} = z$$

$$z' + \underbrace{P(x)(1-n)}_{\tilde{P}(x)} z = \underbrace{Q(x)(1-n)}_{\tilde{Q}(x)}$$

$$z' + \tilde{P}(x)z = \tilde{Q}(x)$$

$y' + P(x)y = Q(x)y^n \Rightarrow z = y^{1-n}$

a) $xy' + y = x^4y^3.$

$$\overbrace{z = y^{1-3} = y^{-2}}$$

Si $x \neq 0 \Rightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}y = \underbrace{x^3}_{Q(x)}y^3$

$$z' + \underbrace{P(x)(1-n)}_{\tilde{P}(x)}z = \underbrace{Q(x)(1-n)}_{\tilde{Q}(x)}$$

$z' - \frac{2}{x}z = -2x^3 \Rightarrow z(x) = Ke^{-\int -\frac{2}{x}dx} + e^{-\int \frac{2}{x}dx}\int -2x^3 e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx$

$-\int -\frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2\ln(|x|)$

$\int -\frac{2}{x}dx = -2\ln(|x|)$

<u>$x > 0$:</u>

$e^{2\ln|x|} = x^2$

$\Rightarrow \int -2x^3 e^{2\ln(x)} dx$

$\shortparallel$

$-2\int x^5 dx = -\frac{2}{6}x^6 = -\frac{1}{3}x^6$

$z(x) = Kx^2 + x^2\left(-\frac{1}{3}x^6\right) = Kx^2 - \frac{1}{3}x^8$

$z = y^{-2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{z(x)}}$