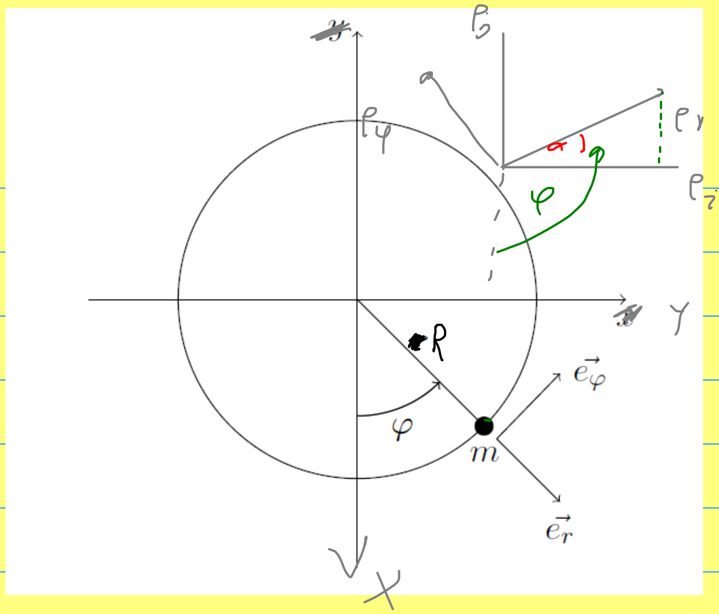
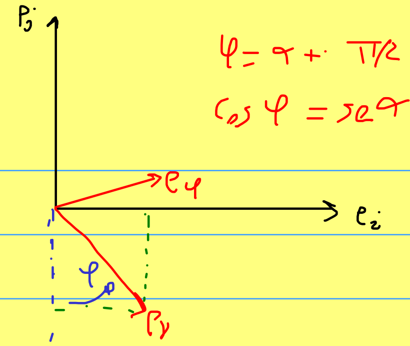
20/10





$$\boxed{\begin{aligned} e_r &= (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) \\ e_\varphi &= (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi) \end{aligned}}$$

a) Demostrar que la ecuación que rige el movimiento de la partícula es $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \operatorname{sen}\varphi$,

$F = ma$, $\quad r(t) = R\, e_r$

$$\dot{r} = \cancel{\dot{R}}\, e_r + R\,\dot{e}_r = R\,\dot{\varphi}\, e_\varphi \qquad \boxed{\dot{r} = R\,\dot{\varphi}\, e_\varphi}$$

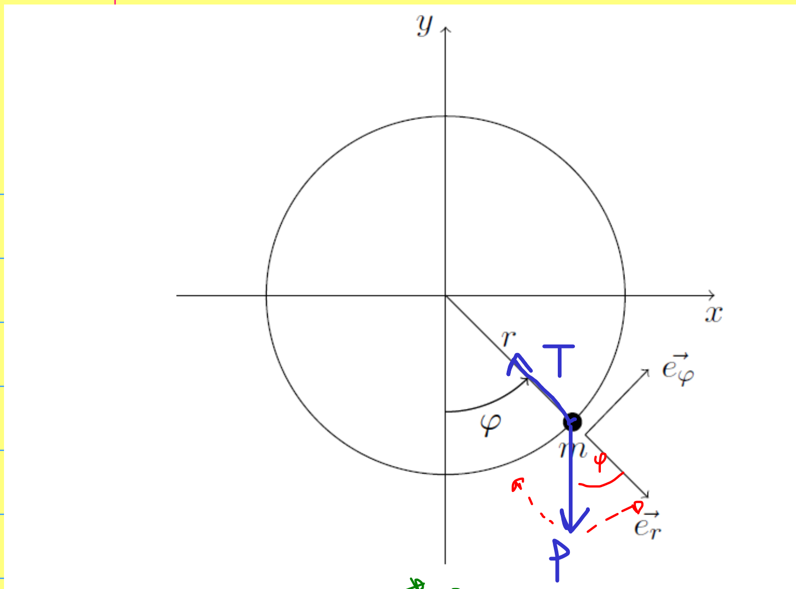
$$e_r = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) \rightarrow \dot{e}_r = (-\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi}, \cos\varphi\,\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}\,\underline{(-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)}$$

$$\Rightarrow \dot{e}_r = \dot{\varphi}\, e_\varphi$$

$$\ddot{r} = \cancel{\dot{R}}\,\dot{\varphi}\, e_\varphi + R\,\ddot{\varphi}\, e_\varphi + R\,\dot{\varphi}\,\dot{e}_\varphi$$

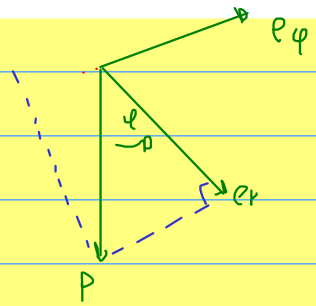
$$e_\varphi = (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi) \rightarrow \dot{e}_\varphi = \dot{\varphi}\,\overbrace{(-\cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi)}^{-e_r}$$

$$\boxed{\ddot{r} = -R\,\dot{\varphi}^2\, e_r + R\,\ddot{\varphi}\, e_\varphi}$$



$$F = -T e_r - P e_y$$

$$\ddot{r} = -R\dot{\varphi}^2 e_r + R\ddot{\varphi} e_\varphi$$



$$-e_y = \cos\varphi\, e_r - \text{sen}\,\varphi\, e_\varphi$$

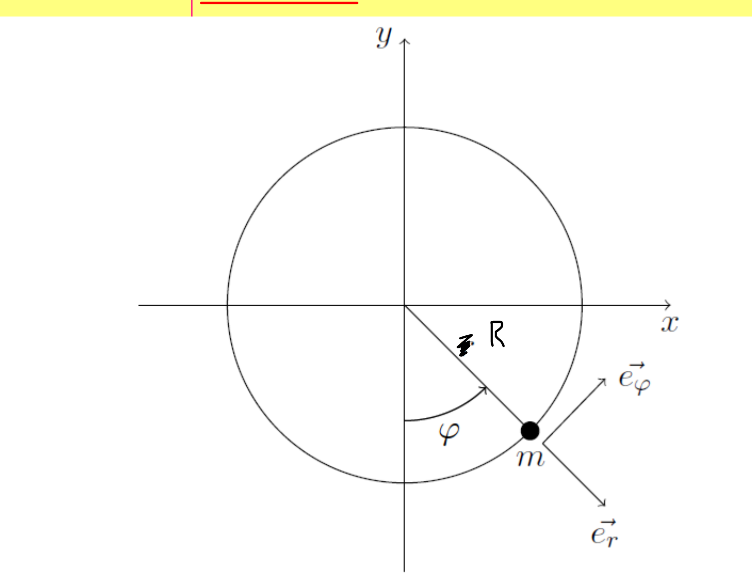
$$\rightarrow F = -T e_r + \underbrace{P}_{mg}(\cos\varphi\, e_r - \text{sen}\,\varphi\, e_\varphi)$$

$$F = (mg\cos\varphi - T)e_r - mg\,\text{sen}\,\varphi\, e_\varphi$$

$$m\ddot{r} = -mR\dot{\varphi}^2 e_r + mR\ddot{\varphi}\, e_\varphi$$

Newton: $F = m\ddot{r} \longrightarrow \begin{cases} mg\cos\varphi - T = -mR\dot{\varphi}^2 & (e_r) \\ -\cancel{m}g\,\text{sen}\,\varphi = \cancel{m}R\ddot{\varphi} & (e_\varphi) \end{cases}$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\,\text{sen}\,\varphi}$$



b) Llamemos $k = \sqrt{\frac{g}{r}}$. Introduciendo una nueva variable $\boxed{\theta = \dot{\varphi}/k}$, transformar la ecuación anterior en la ecuación matricial:

$$\begin{cases} \boxed{\dot{\varphi} = k\theta} \\ \dot{\theta} = -k\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad = -K^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\Theta = \frac{\dot{\varphi}}{K} \quad \to \boxed{\dot{\varphi} = K\theta}$$

$$\dot{\Theta} = \frac{\ddot{\varphi}}{K} = \frac{-K^{\cancel{2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cancel{K}} = -K\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Si $\theta = \frac{\dot{\varphi}}{K}$ $\Rightarrow$ La ecuación $\ddot{\varphi} = -K^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$

es equivalente a $\begin{cases} \dot{\varphi} = K\theta \\ \dot{\theta} = -K\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$

Obs: Si $X = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$

$f(\varphi, \theta) = (K\theta, -K\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ $\Big\}$ $\dot{X} = f(\varphi, \theta)$

c) Hallar los puntos críticos de la ecuación matricial.

$\to f(\varphi, \theta) = (0, 0)$

$K = \sqrt{\frac{g}{R}} > 0$ $\begin{cases} K\theta = 0 & \to \boxed{\theta = 0} \\ -K\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 & \to \mathrm{sen}\,\varphi = 0 \longrightarrow \boxed{\varphi = n\pi} \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Entonces los puntos críticos son $(n\pi, 0)$
$n \in \mathbb{Z}$

d) Linealizar la ecuación matricial alrededor de los puntos críticos. ¿Se puede decir algo sobre la estabilidad de los mismos?

$$\dot{x} = f(\varphi,\theta) = (K\theta, -K \operatorname{sen}\varphi)$$

$$df(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

n par: $\cos(n\pi) = 1 \rightsquigarrow \underset{n\ \text{par}}{df(n\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + K^2 \rightsquigarrow \lambda = \pm iK \rightarrow \text{Parte real } 0$$

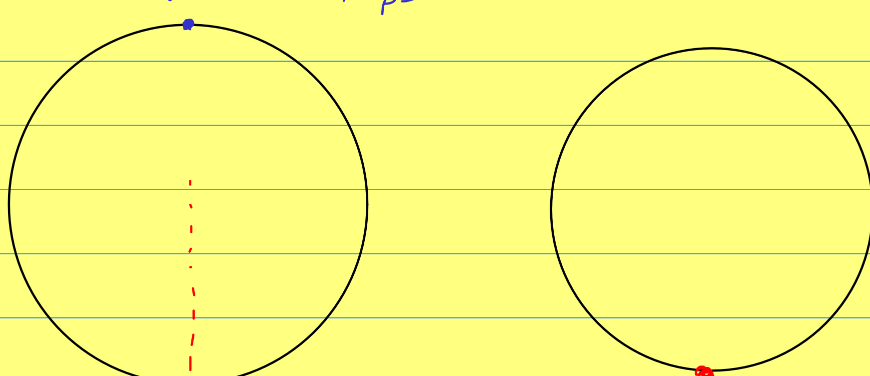
Como los vap tienen parte real 0, no podemos usar H-G.

n impar: $\cos(n\pi) = -1 \rightsquigarrow \underset{n\ \text{impar}}{df(n\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - K^2 \rightarrow \lambda = \pm K$$

Por un lado el sistema linealizado es inestable, y por otro como los vap tienen parte real no cero, podemos aplicar H-G, entonces el sistema original va a ser inestable en los puntos $(\underset{\varphi}{\underline{n\pi}},0)$ con n impar.

$(n\pi,0)$ n impar



$(n\pi,0)$ n par

$e)$ Demostrar que si $\varphi(t)$ y $\theta(t)$ son soluciones a la ecuación matricial, entonces la función

$$\boxed{V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi}$$

cumple $V(\varphi(t),\theta(t)) = cte$. Dar una interpretación física de este hecho.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = K\theta \\ \dot{\theta} = -K \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\dot{V} = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}\theta \underbrace{\dot{\theta}}_{-K\operatorname{sen}\varphi} + \operatorname{sen}\varphi \underbrace{\dot{\varphi}}_{K\theta} = -K\theta \operatorname{sen}\varphi + K\theta \operatorname{sen}\varphi = 0$$

- $\theta = \frac{\dot{\varphi}}{K} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\theta^2 \rightsquigarrow$ Energía cinética
- $-\cos\varphi \rightsquigarrow$ Energía potencial

$V \rightsquigarrow$ Energía mecánica

$V = cte$ quiere decir que la energía mecánica se conserva.

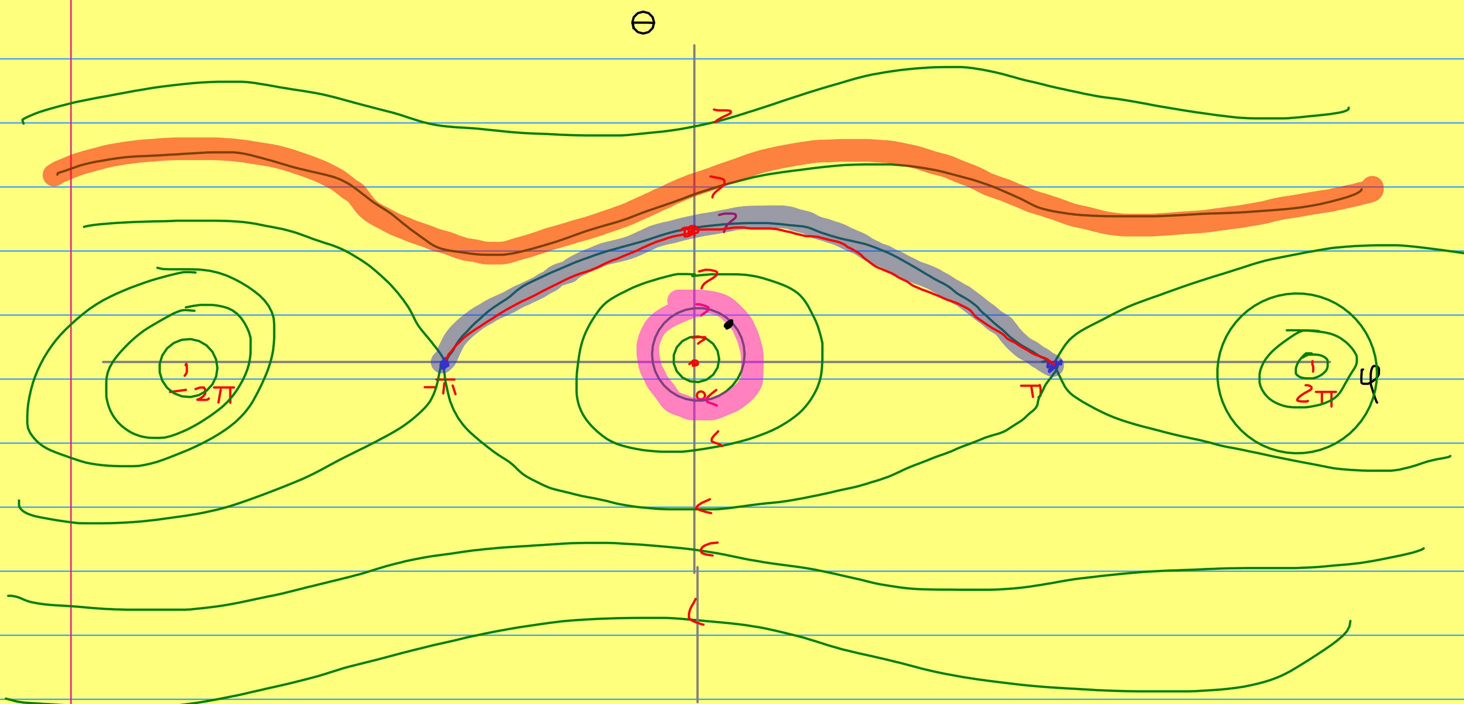
$f)$ Usando la parte anterior, estudiar la estabilidad de los puntos críticos.

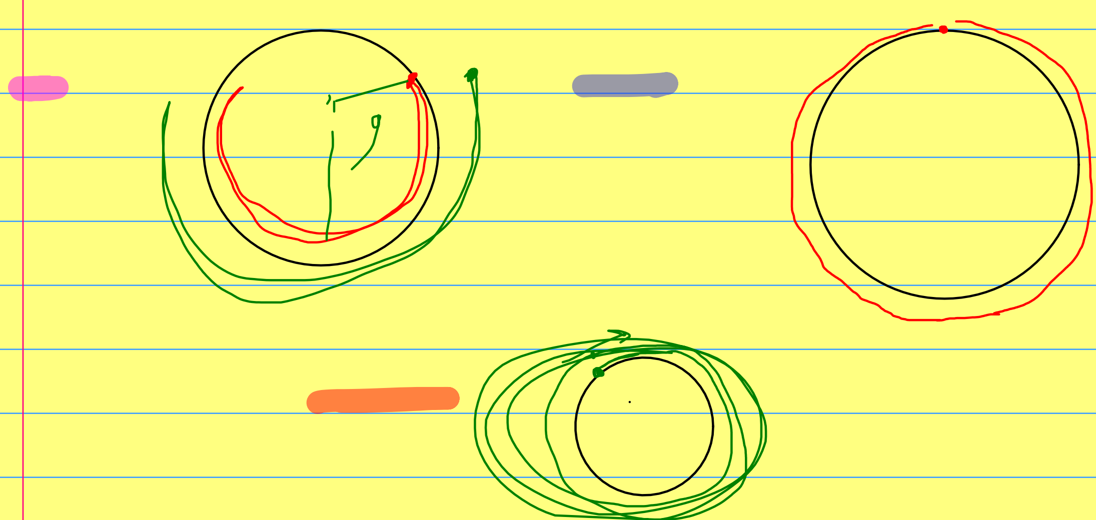
Ver si: $V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi$ cumple algún teo de Lyapunov en los puntos $(n\pi, 0)$ n par *g*) Esbozar un diagrama de fase de las soluciones a la ecuación matricial. Interpretarlo a partir del fenómeno físico que modela.

$$\dot{x} = (K\theta, -K \operatorname{sen} \varphi) \qquad \begin{cases} \dot{\varphi} = K\theta \\ \dot{\theta} = -K \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

$V(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi$ → Las soluciones son las curvas de nivel de V.

$$\frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi = C \rightsquigarrow \theta = \pm\sqrt{2C + 2\cos\varphi}$$





2. Demuestre que el origen es un punto fijo asintóticamente estable usando una “mejor” función de Liapunov $V(x,y)=1/2(x+y)^2+x^2+1/2y^2$ que la función de energía.

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-y-\sin x.\end{cases}$$

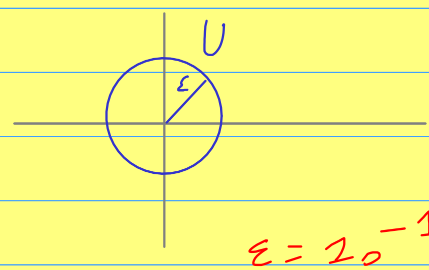
$\dot V = (x+y)(\dot x + \dot y) + 2x\dot x + y\dot y$

$= (x+y)(\underbrace{y-y}_{0} - \text{sen}\,x) + 2xy + y(-y - \text{sen}\,x)$

$\dot V = -x\,\text{sen}\,x - y\,\text{sen}\,x + 2xy - y^2 - y\,\text{sen}\,x$

$\dot V = -x\,\text{sen}\,x - 2y\,\text{sen}\,x + 2xy - y^2$

$(0,0)$



$\boxed{\text{sen}\,x \approx x}$ si $x \approx 0$

$\dot V \approx -x^2 \overbrace{-2xy + 2xy}^{0} - y^2$

$\varepsilon = 10^{-1000000}$

$\dot V \approx -x^2 - y^2$