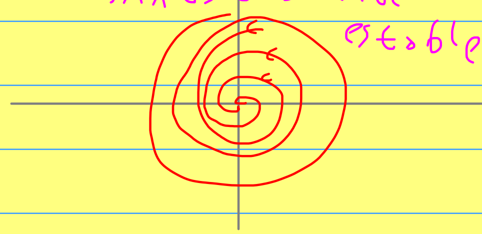
15/10

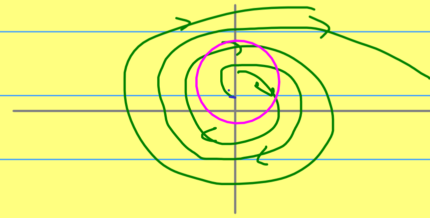
$f(x) = 0 \to \dot{x} = 0$

b) Dar un ejemplo de una ecuación diferencial que presente un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable, y que admita una trayectoria (distinta de la del equilibrio) que tienda en el futuro a dicho punto.

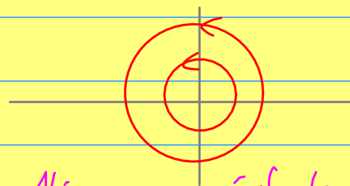
En $\mathbb{R}^2$:

Asintóticamente estable





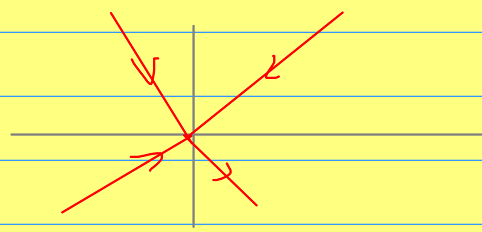
Estable



Vap complejas.

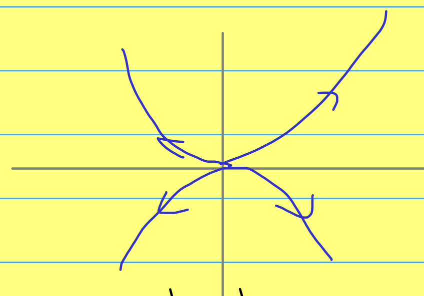
Ninguna órbita tiende a $(0,0)$

Vap reales:



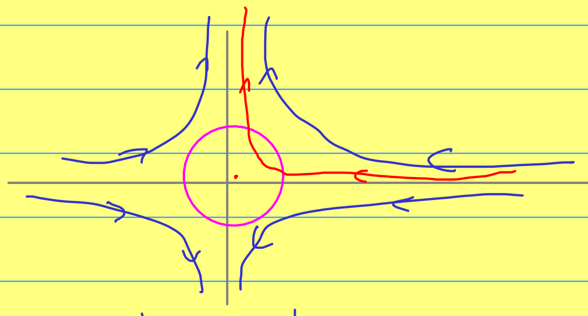
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Asintóticamente estable



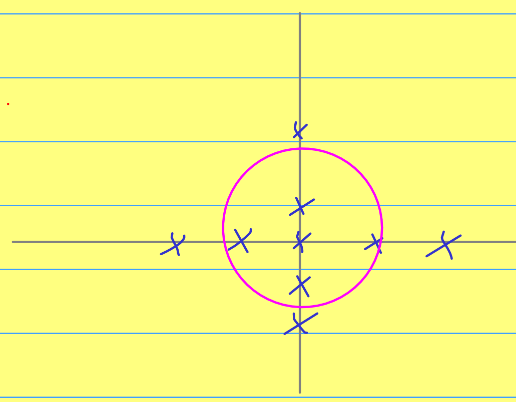
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Inestable



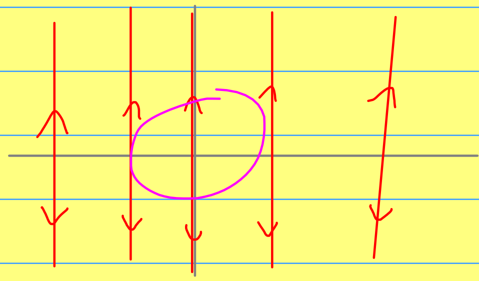
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Inestable



$\lambda_1 = 0 = \lambda_2 \to \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ninguna órbita (distinta al pto de eq) tiende a este.

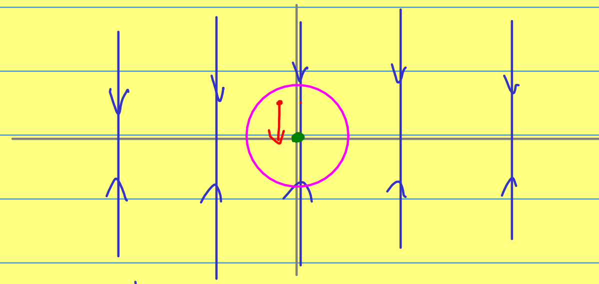


$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 > 0$

No es estable



$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 < 0$

Si comienzo en $(0, y)$, $y \neq 0$ entonces $\varphi_t \longrightarrow (0,0)$

2. Mostrar que si $\overline{x}$ es un $\overset{P}{\overline{\text{punto crítico}}}$ no aislado de una ecuación autónoma entonces no puede ser asintóticamente estable.

$\overline{x}$ estable + $\exists$ un entorno U tq toda solución que arranca tiende a $\overline{x}$

$\forall$ U abierto que contiene a $\overline{x}$, existe otro $\overline{y} \in U$ que cumple P

Si $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

Linealizar el sistema en un punto (a,b) es considerar la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{f(a,b)} + df(a,b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Taylor de orden 1 en } (a,b) \text{ de } f}$$

Si (a,b) es un punto crítico $f(a,b) = (0,0)$

Ej: $f(x,y) = (-x + y^2, -y + x^2)$, $X = (x,y)$

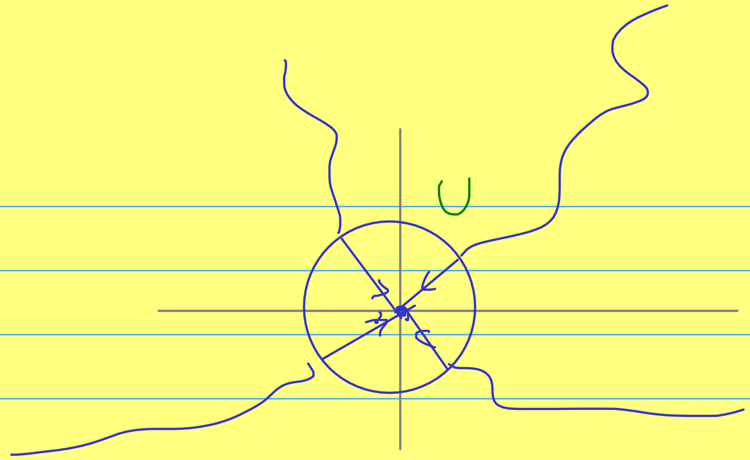
$$\dot{X} = f(X)$$

$(0,0)$ es un punto crítico. Podemos linealizar el sistema:

$$df = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

H-G: En un entorno del punto crítico la ecuación $\dot{X} = f(X)$ se comporta igual que

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$



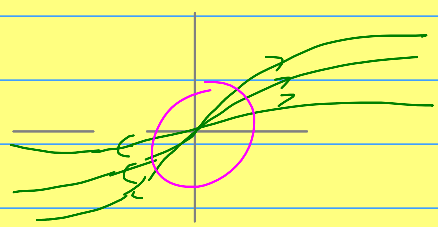
4. Sea λ un número real. Discutir según λ si el origen es un punto estable, inestable o asintóticamente estable para:

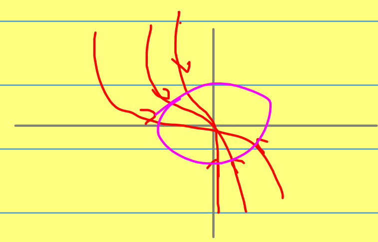
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x \\ \dot{y} &= x + \lambda y \end{aligned}$$

Determinar los valores de a y b que hacen que $ax^2 + by^2$ sea una función de Liapunov. Comparar.

Obs:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$





Def: $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de Lyapunov si está en las hipotes de los teoremas de Lyapunov

Teo 1: $\bar{x}$ punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es loc. Lipschitz.

Si $\exists\ V : \Omega \subset U \to \mathbb{R}$ tq: i) $\bar{x}$ es un mínimo estricto de V

ii) $\dot{V} \leq 0 \quad \forall\ x \in \Omega$

Entonces $\bar{x}$ es estable

Teo 2: $\bar{x}$ punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es loc. Lipschitz.

Si $\exists\ V : \Omega \subset U \to \mathbb{R}$ tq: i) $\bar{x}$ es un mínimo estricto de V

ii) $\dot{V} < 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}$

Entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable

Recordar: $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$

5.a) a) $\begin{cases} \dot{x} = 3xy, \\ \dot{y} = -x^2 - y^3 \end{cases}$, $V(x,y) = ax^2 + by^2$

Punto crítico $(0,0)$ | $(x,y) = \varphi(t)$ donde φ es una solución

i) Para que $(0,0)$ sea un mínimo estricto es necesario que $a, b > 0$.

ii) $\dot{V} = \nabla V \cdot f$

$$\dot{V} = 2ax\overset{3xy}{\dot{x}} + 2by\overset{-x^2-y^3}{\dot{y}}$$

$$\dot{V} = 6ax^2y - 2bx^2y - 2by^4$$

$$= \underbrace{(6a - 2b)}_{<0} x^2 y \underbrace{- 2by^4}_{<0}$$

¿Cómo deberían ser $a, b \in \mathbb{R}^+$ para que $\dot{V}(x,y) < 0$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$?

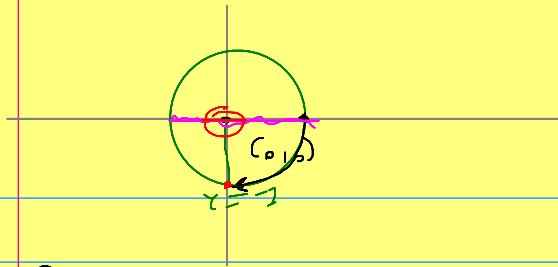
Obs: $-2by^4 \leq 0 \Rightarrow$ Necesitamos $6a - 2b \leq 0$ $\to a \leq \frac{1}{3} b$

Lo fácil: $6a - 2b = 0$ $\to \dot{V}(x,y) \leq 0$ $\forall (x,y)$

Lo difícil: Tomo $b = 1000$ $\to a < \frac{b}{3} = 333,\overline{3}$

$a = 1$ $\qquad a = 300 < \frac{b}{3}$

Sea $U = B((0,0), 2)$: $\to |y| \leq 2$, en el peor de los casos $y = -2$



Conclusión: En todo entorno de $(0,0)$ hay puntos de la forma $(x,0)$

Luego $\dot V(x,0)=0$

Nunca cumple Lyapunov 2

5.c) c) $\dot x = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2,$ $\dot y = -y^3$, $V(x,y) = ax^2 + by^2$

$a,b>0$

$(0,0)$

$$\dot V = 2ax\dot x + 2by\dot y$$

$$= 2ax\left(-\frac{x^3}{2} + 2xy^2\right) + 2by(-y^3)$$

$$= -ax^4 + 4ax^2y^2 - 2by^4 < 0$$

Obs: $X = x^2$, $Y = y^2$ $\rightarrow$ $\underbrace{\dot V = -aX^2 + 4aXY - 2bY^2}_{\text{Forma cuadrática}}$

asociada a $A = \begin{pmatrix} -a & 2a \\ 2a & -2b \end{pmatrix}$

Una forma cuadrática $\dot V < 0$ si es definida negativa sii la matriz A tiene vap. negativos

Obs: $\boxed{\dot V = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4}$

$$A = \begin{pmatrix} -a & 2a \\ 2a & -2b \end{pmatrix} \qquad \Big|\ D = PAP^{-1} \quad , D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$tr(A) = -a - 2b < 0$

$tr(D) = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$

$\exists\ a, b \in \mathbb{R}^+$ tq

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$\det(A) = 2ab + 4a^2 > 0$

$\det(D) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$

$$p(\lambda) = (-a - \lambda)(-2b - \lambda) - 4a^2$$
$$= \lambda^2 + (a + 2b)\lambda - 4a^2$$

$$\lambda = \frac{-a - 2b \pm \sqrt{(a+2b)^2 + 16a^2}}{2}$$

Hay que encontrar $a, b \in \mathbb{R}^+$ tq $-a - 2b \pm \sqrt{(a+2b)^2 + 20a^2} < 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2+y^2)x + y \\ \dot{y} = (x^2+y^2)y - x \end{cases}$$

$$df = \begin{pmatrix} 2x^2 + (x^2+y^2) & 2xy + 1 \\ 2xy - 1 & x^2+y^2+2y^2 \end{pmatrix}$$

$$df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (\overbrace{x^2+y^2}^{r^2})x + y \\ \dot{y} = (\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})y - x \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} x &= r(t)\cos\theta(t) \\ y &= r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = r^3\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = r^3\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\theta \end{cases}$$