13/10

10. Supongamos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 y que existe una función $\underline{v : \mathbb{R} \to [0, +\infty)}$ $\underset{2}{\text{continua}}$ tal que $\| f(s, \varphi(s)) \| \leq v(s) \| \varphi(s) \|$

$$\underbrace{\|f(t,x)\| \leqslant v(t)\|x\|}_{1}$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Demostrar que las soluciones maximales de la ecuación $x' = f(t, x)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$.

Gronwall: $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} = [0,+\infty)$, $\alpha \geq 0$ tal que

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s) v(s)\, ds \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

entonces $u(t) \leq \alpha\, e^{\int_a^t v(s)\, ds}$

Obs: 1) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es solución a $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

si y sólo si

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s)\, ds \qquad t_0 \in [a,b]$$

$$\dot{\varphi}(s) = f(s, \varphi(s))$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds}$$

2) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, pero para Gronwall necesitamos una $u : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{tikzcd}[a,b] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\|\varphi\|"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\|\cdot\|"] & \mathbb{R}_{\geq 0}\end{tikzcd}$$

Definimos $\boxed{u(t) := \| \varphi(t) \|}$, queremos ver si existe $\alpha \geq 0$, $v : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s) v(s)\, ds$$

$$\cdot\ u(t) := \|\varphi(t)\| = \left\| \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \right\|$$

Desigualdad triangular de +

$$\leq \underbrace{\|\varphi(t_0)\|}_{\alpha \geq 0} + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \right\|$$

Desigualdad triangular de $\int$

$$\leq \underbrace{\|\varphi(t_0)\|}_{\alpha} + \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi(s))\|\,ds$$

Hipótesis:

$\|f(s,\varphi(s))\| \leq v(s)\,\|\varphi(s)\|$

$$u(t) = \|\varphi(t)\| \leq \overbrace{\|\varphi(t_0)\|}^{\alpha} + \int_{t_0}^{t} v(s)\,\underbrace{\boxed{\|\varphi(s)\|}}_{u(s)}\,ds$$

Verifica hipótesis de Gronwall

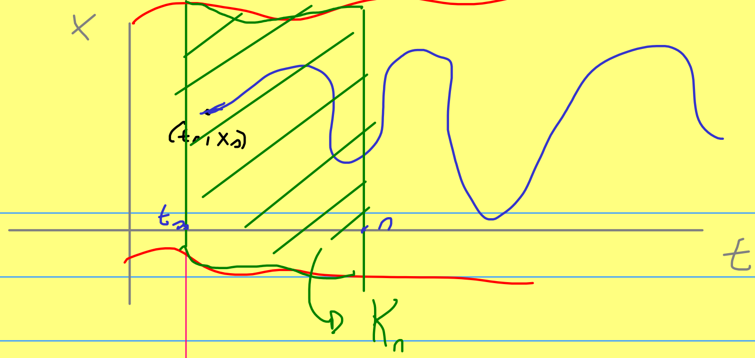
$$\begin{cases} u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} v(s)\,u(s)\,ds, & t_0 \in [a,b],\ t \in [t_0,b] \\ u, v : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \end{cases}$$

Entonces por Gronwall, $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\|\, e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}$

Esta "acotando" la coordenada espacial.

$\cdot\ v : [t_0, t] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, v es continua $\Big\}$ Por Weierstrass, $\exists\ M \geq 0$ tal que $v(s) = |v(s)| \leq M \quad \forall\ s \in [t_0, t]$.

$$\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds \leq \int_{t_0}^{t} M\,ds = M(t-t_0) \to \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\|\, e^{M(t-t_0)}$$



Ahora si sabemos que la solución φ está acotada en la coordenada espacial

$$K_n = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|\overset{\varphi(t)}{x}\| \leq \|\overset{\varphi(t_0)}{x_0}\| e^{M(t-t_0)}, \; t \in [t_0, n] \right\}$$

Culminar usando escape de compacto.

Si $\varphi(t)$ es solución, $\varphi(-t)$ "va al pasado"

11. Se considera la ecuación $\dot{x} = t^2 - x^4$. $\rightarrow$ Continua

a) Estudiar el signo de $\dot{x}$.

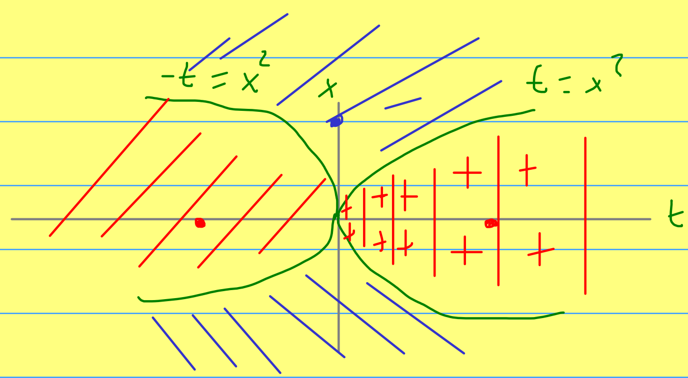
b) Sea $\mathcal{R} = \{(t,x) : \ t > x^2\}$ y $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una solución tal que existe $t_0 \in (a,b)$ tal que $\varphi(t_0) \in \mathcal{R}$.

1) Probar que $\varphi(t) \in \mathcal{R}$ para todo $t \geq t_0$ y $t \in (a,b)$.

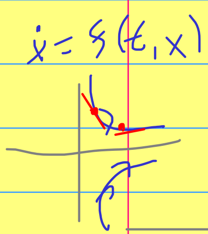
2) Probar que el intervalo maximal de φ es no acotado superiormente.

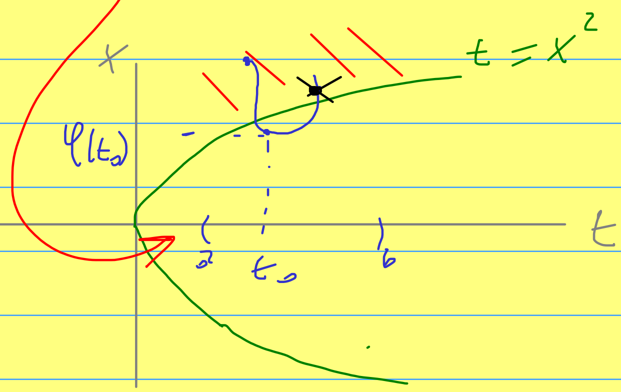
a) $\dot{x} = 0$ sii $t^2 = x^4$, $f(t,x) = t^2 - x^4$

sii $|t| = x^2$



b) $\mathcal{R} = \{(t,x) : t > x^2\}$, $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ solución tal que existe $t_0 \in (a,b)$ con $\varphi(t_0) \in \mathcal{R}$.





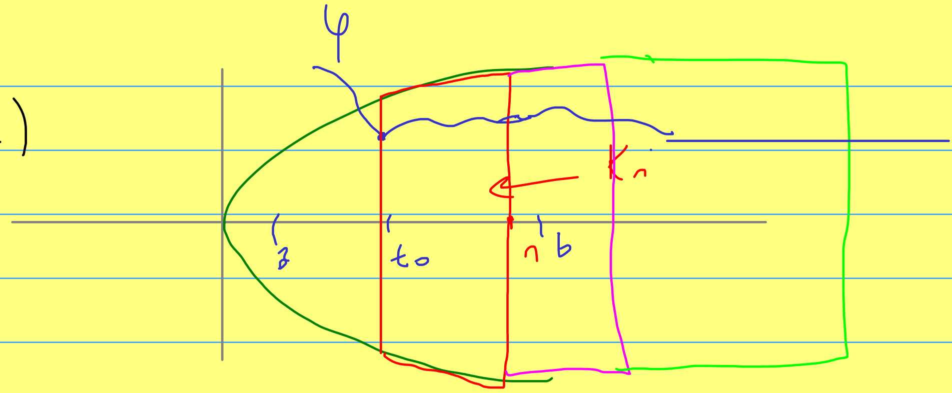
Probar que $\varphi(t) \in \mathcal{R}$ $\forall t \geq t_0$

• Como en $\mathcal{R}$ $sg(f) > 0$, si $\varphi(t)$ sale de $\mathcal{R}$, tiene que salir por arriba

• Si existe $\bar{t} \in (t_0, b)$ tal que $\varphi(\bar{t}) \notin \mathcal{R}$, entonces

$\Rightarrow$ $\dot{\varphi}(\bar{t}) > 0$ pero por la parte (a), fuera de $\mathcal{R}$ (para $t \geq 0$), $\dot{\varphi} < 0$

2)



Sea $K_n = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 < t, [t_0, n]\}$

Como la solución φ no cruza la curva $x^2 = t$, entonces se escapa por el tiempo.
Haciendo tender n a $+\infty$, tenemos que

$$[t_0, +\infty) \subset I(t_0, x_0)$$

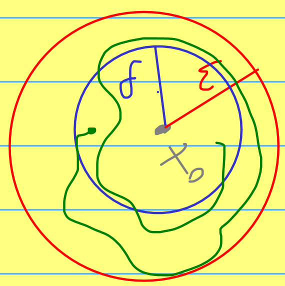
Práctica 5

1. Consideremos una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ en $\mathbb{R}^n$.

   a) Sea x_0 un punto de equilibrio estable de la ecuación. Demostrar que si $x(t)$ es una solución tal que para todo $\delta > 0$ existe $t_\delta > 0$ para el cual se cumple $d(x(t_\delta), x_0) < \delta$, entonces

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0.}$$

• x_0 estable: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x(t_0) - x_0| < \delta$ entonces $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$



• $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ t_\varepsilon$ tal que

$$\underbrace{x(t) \in B(x_0, \varepsilon)}_{d(x(t), x_0) < \varepsilon} \quad \forall t > t_\varepsilon.$$

• Sea $\varepsilon > 0$, como x_0 es estable, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tq si $|x(t_0) - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x(t) - x_0| < \varepsilon}_{d(x(t), x_0) < \varepsilon}$ $\forall t \geq t_0$

Por lo rosado, para ese mismo $\delta_\varepsilon > 0$, existe un $t_{\delta_\varepsilon} > 0$ tal que $|x(t_{\delta_\varepsilon}) - x_0| < \delta_\varepsilon$.

• Como ε es arbitrario, y a esta:

$\delta = \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \{x_n = x(t_n)\}$