6/10

8. *a*) Llamemos $u : I \to \mathbb{R}$ a la solución maximal de la ecuación $xx' - (1+x^2)t^2 = 0$ con condición inicial $x(0) = 1$. Hallar $u(t)$ y probar que el intervalo maximal I contiene a $[0, +\infty)$.

1 2

$$\begin{cases} x\dot{x} - (1+x^2)t^2 = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow{x \neq 0} \dot{x} = \frac{1+x^2}{x} t^2$$

1) Variables separables:

$$\int_1^{x(t)} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^t s^2\,ds \quad \frac{t^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{t^3}{3}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^{x(t)} \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_*^* \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|)\Big|_1^{x(t)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{x(t)}$$

$u = 1+x^2 \to du = 2x\,dx$

$1+x^2 > 0$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\ln(1+x^2(t)) - \cancel{\frac{1}{2}}\ln(2) = \frac{2t^3}{3}$$

Despejar

$$\ln(1+x^2(t)) = \frac{2t^3}{3} + \ln(2) \qquad e^{a+b} = e^a e^b$$

$$1 + x^2(t) = e^{\frac{2}{3}t^3 + \ln(2)} = e^{\frac{2}{3}t^3} \cdot e^{\ln(2)} \quad = 2$$

$$1 + x^2(t) = 2e^{\frac{2}{3}t^3}$$

$$x(t) = \pm\sqrt{2e^{\frac{2}{3}t^3} - 1}$$

sabemos

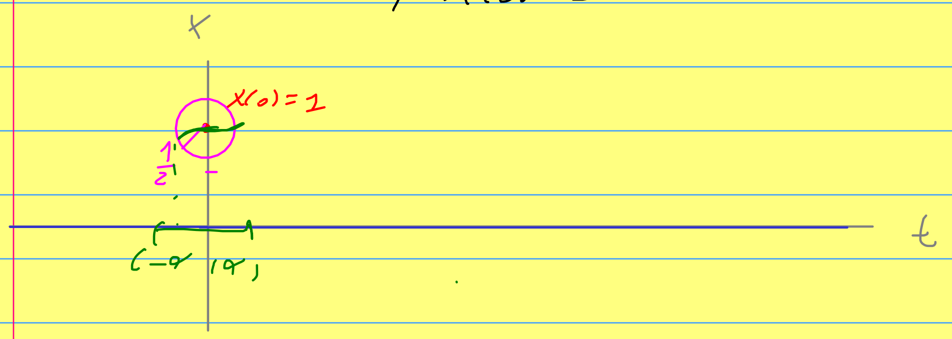
$$1 = x(0) = \pm\sqrt{2-1} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$\boxed{u(t)=\sqrt{2e^{\frac{2}{3}t^3}-1}}$$

2) Ver que si I es el intervalo maximal, entonces $[0,+\infty)\subset I$

$u: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(t)$ es solución a

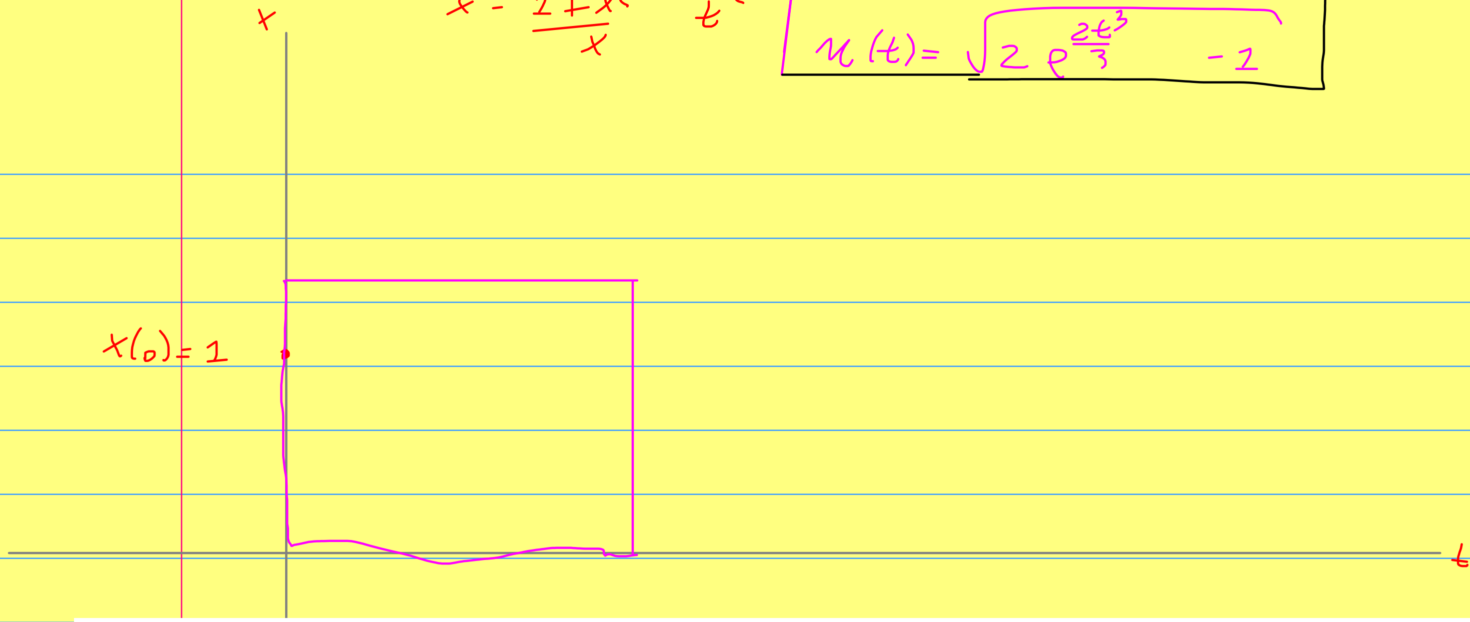
$$\begin{cases}\dot{x} = \frac{1+x^2}{x}\,t^2\\ x(0)=1\end{cases}$$



Como $\frac{1+x^2}{x}$, y t^2 son funciones C^1, siempre y cuando $|x|>\frac{1}{2}>0$, entonces si $U=B((0,1),\frac{1}{2})$ tenemos que $G(t,x):=\frac{1+x^2}{x}\,t^2$ es C^1 en U.

por lo tanto es continua y loc. Lipschitz.

$\dot{x} = \frac{1+x^2}{x} t^2$ $\boxed{u(t) = \sqrt{2 e^{\frac{2t^3}{3}} - 1}}$



$b)$ Consideremos la ecuación:

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

en donde:

$$F(t,x) = \frac{2}{\pi}\frac{1+x^2}{x}t^2 \arctan(x+t).$$

1) Determinar el dominio de definición de F.
2) Verificar que $(*)$ se encuentra en las hipótesis del Teorema de Picard.
3) Sea $v : J \to \mathbb{R}$ la solución maximal de $(*)$. Probar que $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq 0$ en el intervalo J.
4) Probar que el intervalo maximal J contiene a $[0, +\infty)$.

1) $F(t,x) = \frac{2}{\pi} \frac{1+x^2}{x} t^2 \arctan(x+t)$

$x = 0$ problemas
$\mathrm{Dom}(\arctan(h)) = \mathbb{R}$

$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\}$
$= \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

$G(t,x)$

2) $$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{\pi} \frac{1+x^2}{x} t^2 \arctan(x+t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Para ver que $F(t,x)$ es C^1 e $U := B((0,1), \frac{1}{2})$ alcanza con ver que $\arctan(x+t)$ lo es.

$\arctan(x+t)$ es C^1 $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, luego

$U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ En U también.

3) Sea $v : J \to \mathbb{R}$ la solución maximal de (*). Probar que $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq 0$ en el intervalo J.

$v : J \to \mathbb{R}$ sol. maximal $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$u : I \to \mathbb{R}$ sol. maximal $\begin{cases} \dot{x} = G(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Queremos ver que $v(t) \leq u(t)$ $\forall t \geq 0$, $t \in J$

Hay que ver: i) $F \leq G$

ii) $\exists\, t_0 \in I \cap J$ tq $v(t_0) = u(t_0)$

ii) Observar que $0 \in I \cap J$ y además $v(0) = 1 = u(0)$

i) $F(t,x) = \frac{2}{\pi} \underbrace{\frac{1+x^2}{x} t^2}_{G(t,x)} \arctan(t+x)$

$G(t,x) = \frac{1+x^2}{x} t^2$

$F = G \frac{2}{\pi} \arctan(t+x) \underset{\text{Queremos}}{\leq} G$

sii $\frac{2}{\pi} \arctan(t+x) \leq 1$

$Im(\arctan(t+x)) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{2}{\pi}\arctan(t+x) \le \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1$

Entonces por comparación de soluciones

$v(t) \le u(t) \quad \forall t \ge t_0 = 0$

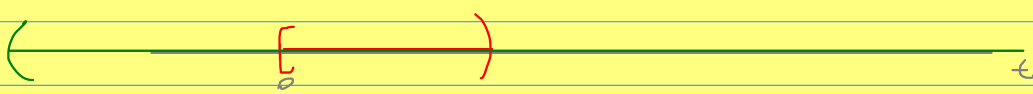
$t \in \underline{I \cap J}$

3) Sea $v : J \to \mathbb{R}$ la solución maximal de (*). Probar que $v(t) \le u(t)$ para todo $t \ge 0$ en el intervalo $\underline{J}$.

Hay que ver si $I \cap J = J$ sii $J \subset I$ $(\forall t \ge 0)$

Por (2), $[0, +\infty) \subset I \rightsquigarrow I \cap \{t \ge 0\} = [0, +\infty)$

Queremos ver $\underbrace{J \cap \{t \ge 0\}}_{[0} \subset I$



$J \cap \{t \ge 0\} \subset [0, +\infty) \subset I$

Entonces $\forall t \ge 0$ $J \cap I = J$, entonce

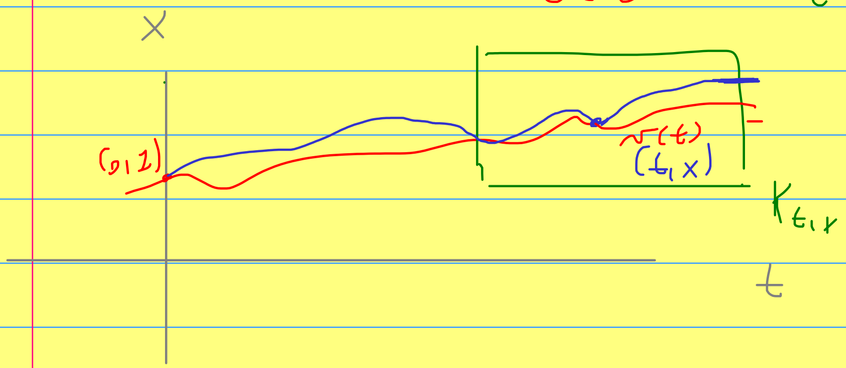
$v(t) \le u(t) \quad \forall t \ge 0$

$\forall t \in J$

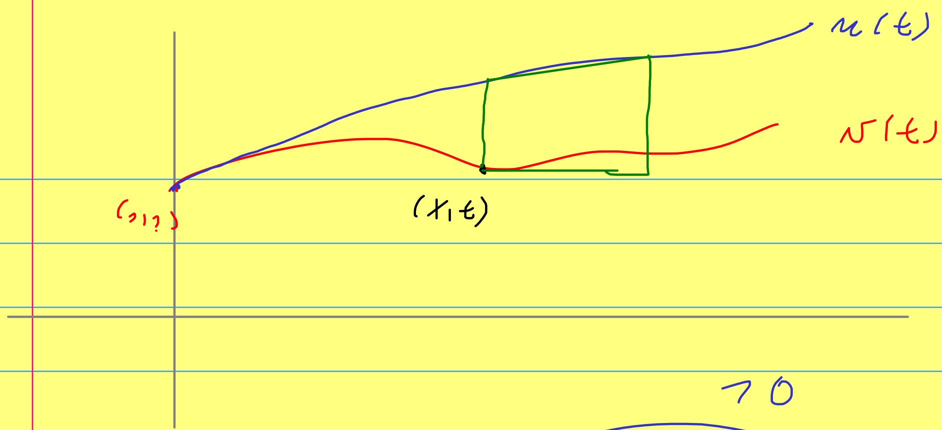
4) Probar que el intervalo maximal J contiene a $[0,+\infty)$.

$\dot{x} = G$

$\dot{x} = F$ $\quad v(t) \leq u(t) \quad \forall t \geq 0$, $t \in J$ $\quad I \supset [0,+\infty)$, $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

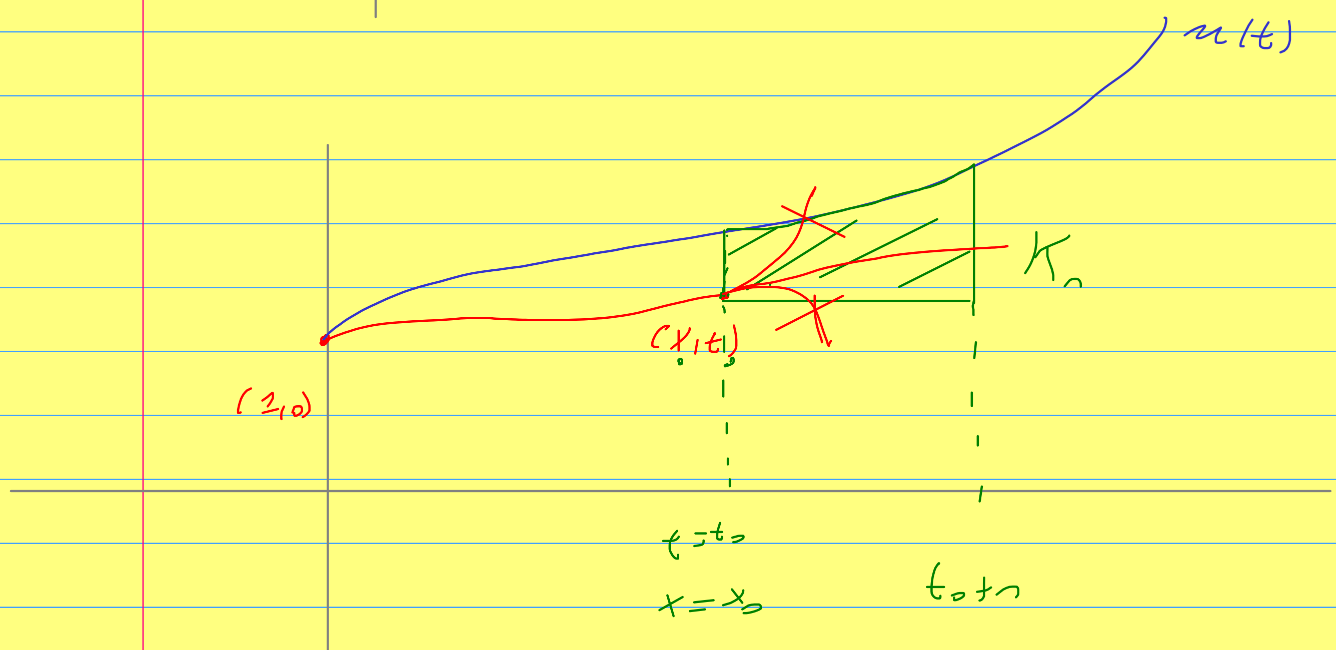


Dado (t,x), $\exists K_{t,x}$ tq la solución $u(t,x)$ se escapa por el tiempo, pues si no $[0,+\infty) \not\subset I$



$$F(t,x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1+x^2}{x}\,t^2\,\overbrace{\arctan(t+x)}^{>0}$$

$\arctan(t+x) < 0$ sii $t+x < 0$



$$K_n = \{(t,x) : t \geq t_0\} \cap \{(t,x) : x \geq x_0\}$$
$$\cap \{(t,x) : t \leq t_0 + n\} \cap \{(t,x) ; u(t) \geq x\}$$