17/9

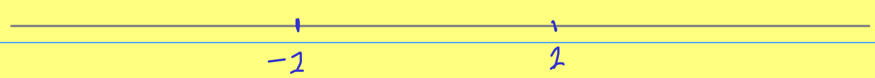
$$x' = \frac{1}{t^2-1}$$

$$f(t,x) = \frac{1}{t^2-1}$$

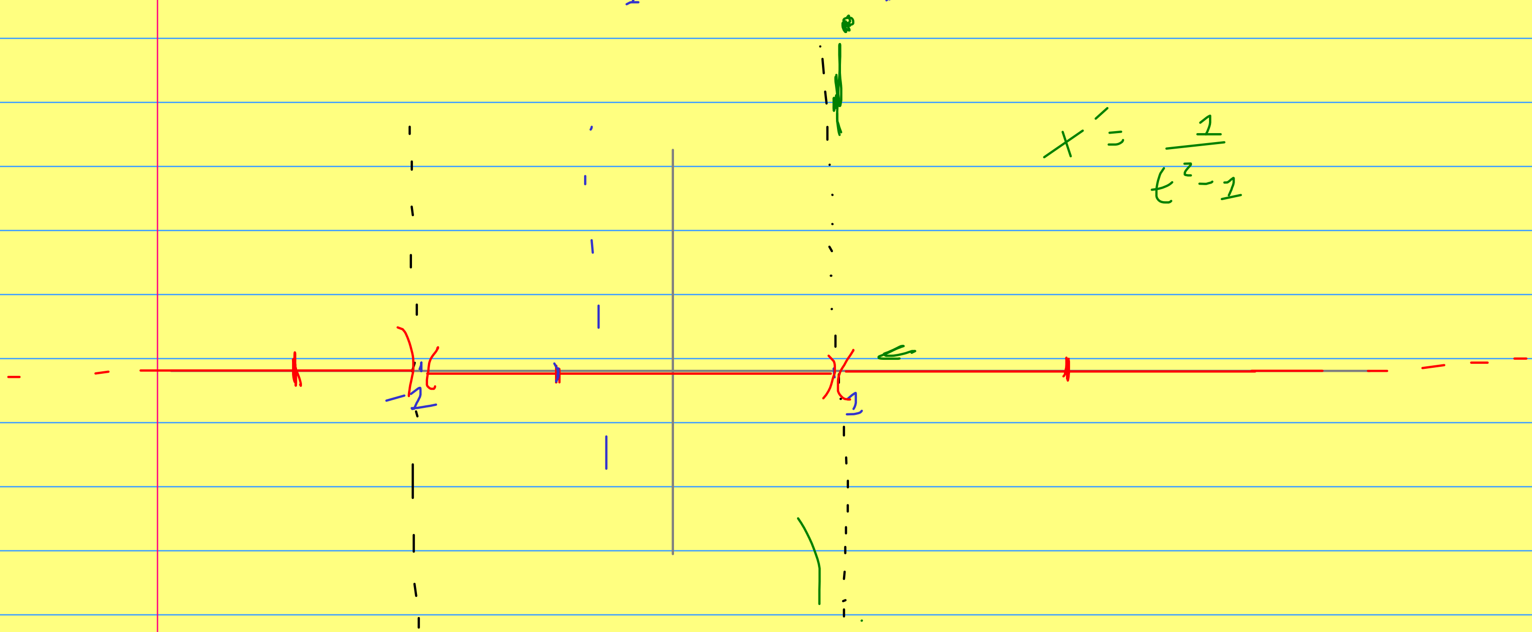
Obs: Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cumple las hipotesis de Picard $\forall (t,x) \in \Omega$ entonces las soluciones máximales están definidas en todo $\mathbb{R}$

Si $f(t,x) = \dfrac{1}{t^2-1}$, entonces $f$ no es continua para $t = \pm 1$

Obs: Para $t \neq \pm 1$, $f' = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}$ es continua, ie. $f'$ es $C^1$ $\Rightarrow$ $f$ es loc Lipschitz




$$x' = \frac{1}{t^2-1}$$



$(t_0, x_0)$

| Condición inicial | Intervalo máximo |
|---|---|
| $-1 < t_0 < 1$ | $I(t_0, x_0) = (-1, 1)$ |
| $t_0 < -1$ | $I(t_0, x_0) = (-\infty, 1)$ |
| $t_0 > 1$ | $I(t_0, x_0) = (1, +\infty)$ |

c) $x' = x^2 \cos t$ $\rightarrow$ $x'' = 2x\cancel{\cos t}_{0} - x^2 \operatorname{sen} t \neq 0$

Punto de equilibrio

$x' = 0$.

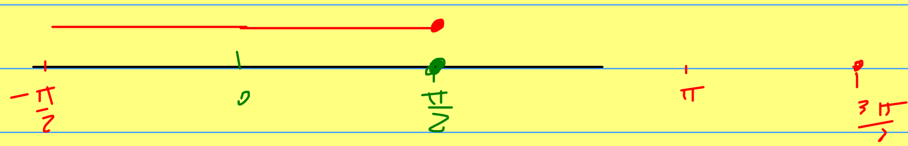
Separa soluciones

sii

$x'' = 0$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x' = x^2 \cos t \\ x(\frac{\pi}{2}) = x_0 \end{cases}$

$x'(\frac{\pi}{2}) = x_0^2 \cdot 0 = 0$



**Teo:** (Escape de compactos):

$f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en las hipótesis de Picard.

$K \subset \Omega$ compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$)

$\varphi: I(t_0, x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ solución maximal de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Entonces existe $t_2 < t_0$, $t_2 \in I(t_0, x_0)$ tal que $(t_2, \varphi(t_2)) \notin K$

$t_2 > t_0$, $t_2 \in I(t_0, x_0)$ tal que $(t_2, \varphi(t_2)) \notin K$

6. Sea la ecuación $x' = x^2 - 1$ con $x(0) = x_0$. Probar, usando salida de compactos, que toda solución maximal con $|x_0| < 1$ está definida en todo $\mathbb{R}$.

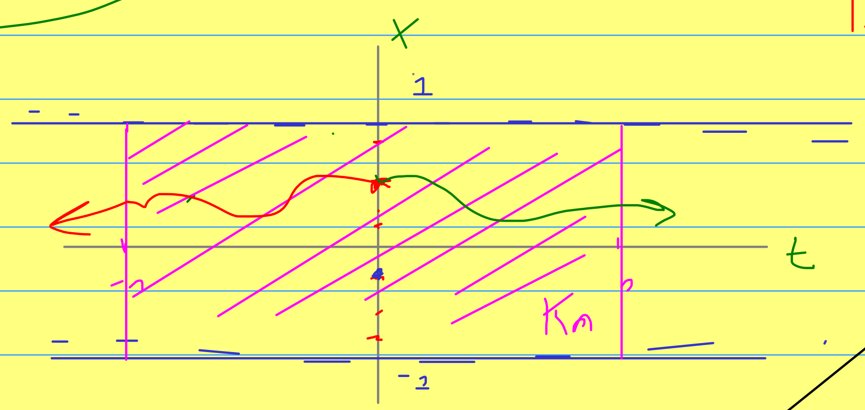
$f(t,x) = x^2 - 1$ cumple Picard.

$I(0, x_0) = \mathbb{R}$

$|x_0| < 1$

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$




$(-n, n) \subset I(0, x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sea $K_n = [-n, n] \times [-1, 1]$

Entonces $I(0, x_0) = \mathbb{R}$

$K_n = [-n,n] \times [-1,1]$ es compacto, entonces por escape de compactos existe $t_2 > t_0 = 0$
$t_2 \in I(0, x_0)$
tal que $\varphi(t_2, x(t_2)) \notin K$

Además sabemos que $x(t) \in (-1,1)$ $\forall t$ entonces la única manera de que $\varphi(t_2, x(t_2)) \notin K$ es que $t_2 > n$.

$\therefore$ $t_2 < -n$

Entonces $[-n,n] \subset I(0, x_0)$ $\forall n$, esto implica que

$$I(0,x_0) = \mathbb{R}$$

7. Se considera la ecuación diferencial $\boxed{x' = \cos(t+x)}$

*a*) Buscar soluciones de la forma $x(t) = at + b$.

*b*) Probar, usando salida de compactos, que todas las soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$.

*c*) Hallar el lugar geométrico de los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.

*d*) A partir de las partes anteriores, realice un bosquejo del gráfico de las soluciones maximales para distintas condiciones iniciales.



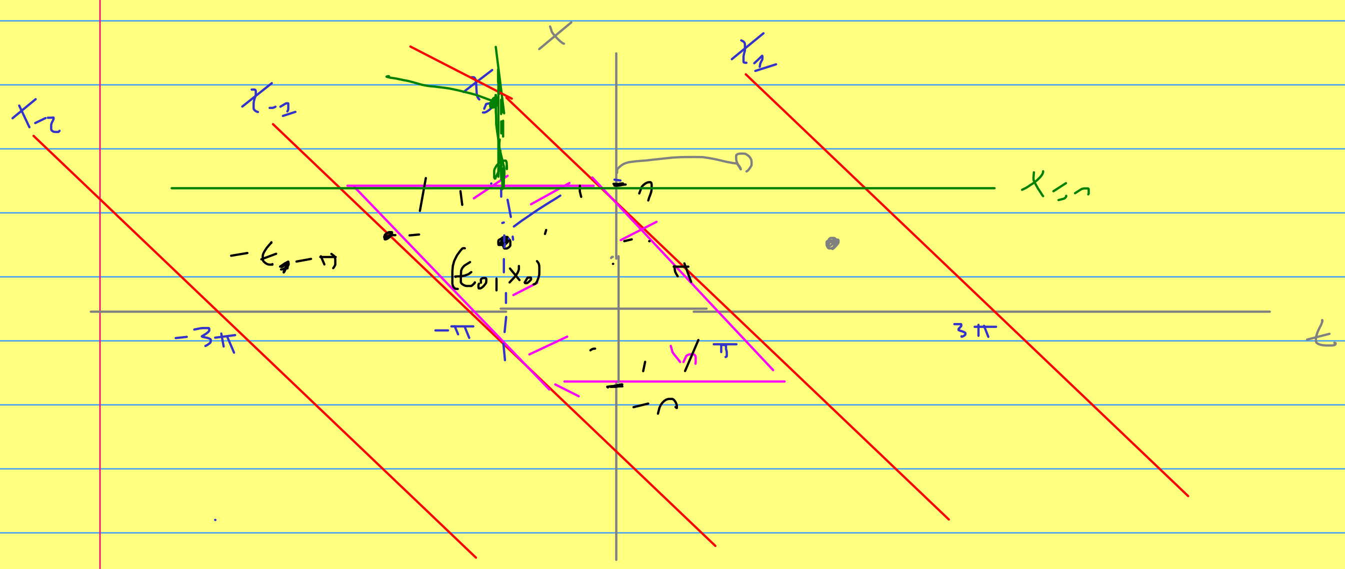
a) $a = x' = \cos(t+x) = \cos(t + at + b) = \cos(t(1+a)+b)$

$a = \cos(t(1+a)+b) \quad \forall t$

$\cos(t(1+a)+b)$ es constante si y sólo si no depende de $t$ sii $1+a=0$ sii $\boxed{a=-1}$

$-1 = \cos(b)$ $\forall t$ $\rightsquigarrow$ $b = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Entonces $\boxed{x_k(t) = -t + \pi + 2k\pi}$




*b*) Probar, usando salida de compactos, que todas las soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$.

Las soluciones $x_k(t) = -t + \pi + 2k\pi$ están definidas en $\mathbb{R}$

Un punto $(t, x)$ está "entre" $x_{-1}$ y $x_0$ si:

$\overbrace{x_{-1}(t)} = -t - \pi \leq x \leq -t + \pi = \overbrace{x_0(t)}$

Sea $V = \{(t, x) : -t - \pi \leq x \leq -t + \pi\}$

$K_n = \underset{\text{acota los costados}}{V} \cap \underbrace{\{x \leq n\}}_{\text{acota por arriba}} \cap \underbrace{\{x \geq -n\}}_{\text{acota por abajo}}$

- Si $(t_0, x_0) \in K_n$, por escape de compactos existe $t_1 < t_0$, $t_1 \in I(t_0, x_0)$ tal que $(t_1, \varphi(t_1)) \notin K$

Por Picard las soluciones son únicas, entonces $\varphi(t_1)$ no puede cortar las rectas, la única posibilidad es que $\varphi(t_1) > n$

Análogamente $\exists\, t_2 > t_1$, $t_2 \in I(t_0, x_0)$ tal que $(t_2, \varphi(t_2)) \notin K$

..., entonces $\varphi(t_2) < -n$

Agrandando el $n$, tenemos $I(x_0, t_0) = \mathbb{R}$

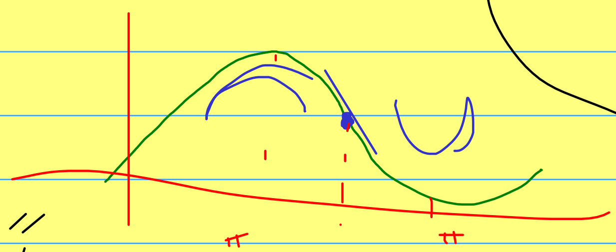
c) Hallar el lugar geométrico de los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.

• Máximos y mínimos. $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} \neq 0$

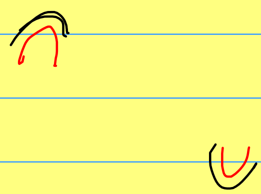
Podría pasar que haya puntos donde $\nexists$ $\dot{x}$ ó $\ddot{x}$

• Puntos de inflexión $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$

No necesariamente $\dot{x} = 0$



$\mathrm{sen}(x) = -\mathrm{sen}(x) = 0$ , $x = \frac{3\pi}{2}$



$\cdot\ \dot{x} = \cos(t+x)$

$t + x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x_k(t) = -t + \pi + 2k\pi$

¿Cuándo $\dot{x} = 0$?

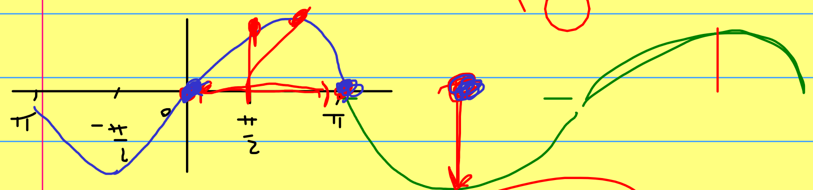
$x = -t + \frac{\pi}{2} + k\pi$

Máximo: $\ddot{x} < 0$

$$\ddot{x} = -\text{sen}(t+x)(1+\dot{x})$$
$$= -\text{sen}(t+x)\underbrace{(1+\cos(t+x))}_{\geq 0} < 0 \quad \text{sii} \quad -\text{sen}(t+x) < 0$$

sii $\text{sen}(t+x) > 0$

$t+x \in (0, \pi) + 2k\pi$




$t + x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \dot{x} = 0$

$t + x \in (0, \pi) + 2k\pi$

$\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ entonces $\frac{\pi}{2} + k\pi \in (0, \pi) + 2k\pi$ si $k$ es par