15/9

Práctico 4

<u>Def</u>: Una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz si existe $K > 0$ tal que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq K \| x - y \| \quad \forall x, y \in U$$

• <u>Ej</u>: i) $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \frac{1}{x}$, $U = (0, +\infty)$

Fijamos $y = 1$, y hacemos tender $x \to 0$

$$|f(x) - f(1)| = |f(x) - 1| = \left| \frac{1}{x} - 1 \right| \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

iii) $f(x) = e^x$, $U = \mathbb{R}$

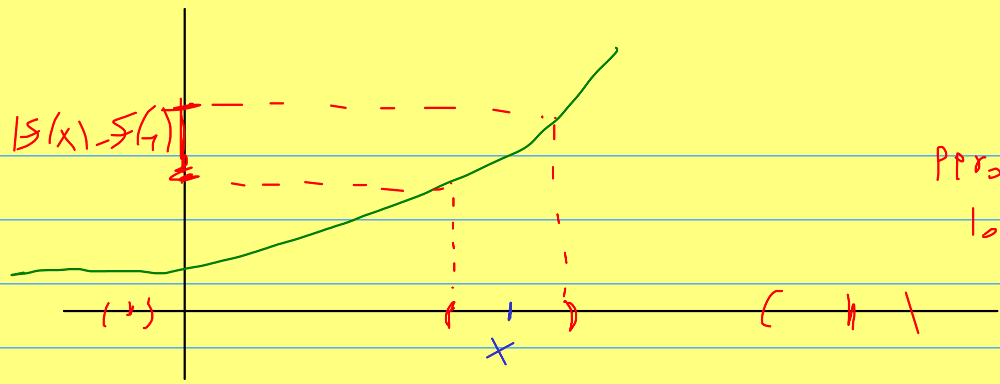
$y = 0$, $|f(x) - f(y)| = |f(x) - 1| =$

$$= |e^x - 1| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

<u>Def</u>: Una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz si:

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, existe una constante K_x, y un entorno U_x tal que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq K_x \| x - y \| \quad \forall y \in U_x$$



e^x no es Lipschitz

pero si lo es localmente.

Teo: $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es C^1, entonces es loc. Lipschitz

Def: $f: \Omega \subset \overbrace{\underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}^n}}^{\mathbb{R}^{n+1}} \to \mathbb{R}^n$ es loc. Lipschitz en la variable espacial si con t_0 fijo la función

$$f_{t_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

es loc. Lipschitz.

Ej:

- $f(t,x) = t x^2$

  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2tx \to$ Continua.

  $f \in C^1 \Rightarrow$ Es loc. Lipschitz

- $f(t,x,y) = \operatorname{sen}(t y^x) + e^{t x \cdot \cos(y)} + \operatorname{senh}(\cosh(e^x + e^y))$

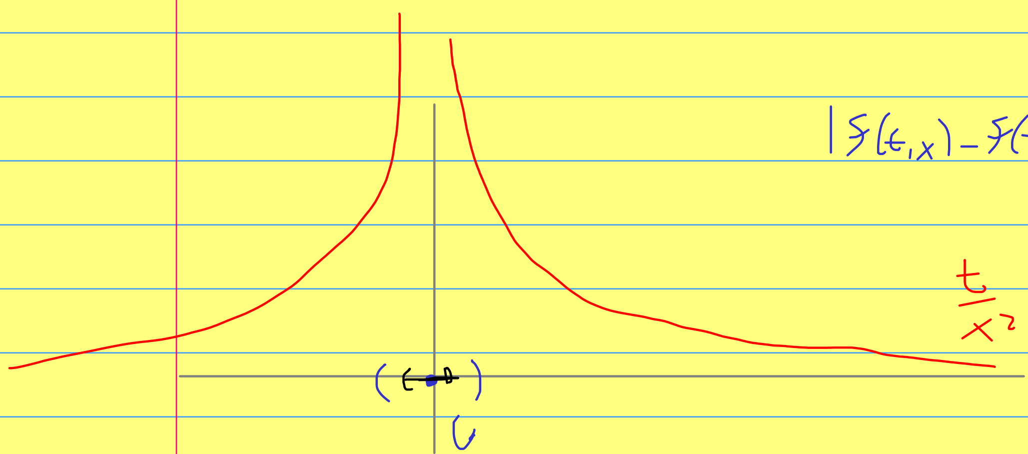
  f es $C^1 \Rightarrow f$ es loc. Lipschitz

• $f(t,x) = \frac{x^2}{t}$

Ej: Para t_0 fijo, $f'(t_0,x) = \frac{2x}{t_0}$ continua

$$f' = -\frac{2t}{x^3}$$

• $\boxed{f(t,x) = \frac{t}{x^2}}$ C^1 no es pues $\lim_{(t,x)\to(t,0)} f(t,x)$ explota



$|f(t,x)-f(t,y)| \le K\,|x-y|$

$\forall x,y \in U$

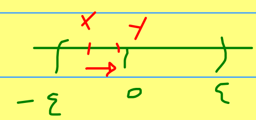
Sea $\varepsilon>0$, mostremos que $\forall K>0$, existen $x,y \in \underbrace{(-\varepsilon,\varepsilon)}_{\ni 0}$ tal que

$$|f(t,x)-f(t,y)| > K\,|x-y|$$

• Supongamos $|f(t,x)-f(t,y)| \le K\,|x-y|$

$$\left|\frac{f(t,x)-f(t,y)}{x-y}\right| = \frac{|f(t,x)-f(t,y)|}{|x-y|} \le K$$

$\forall x,y \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, entonces



$$\lim_{x\to y}\left|\frac{f(t,x)-f(t,y)}{x-y}\right| \le K$$

||

$$\left| f'(t,y) \right| = \left| \frac{2t}{y^3} \right|$$

$\forall y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\left| \frac{2t}{y^3} \right| \leq K$ (→ $+\infty$) Absurdo

---

Teo (Picard): Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ loc. Lipschitz y continua, entonces existe un $\alpha > 0$ tal que el problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única en $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$

Ej 1:

1. Probar que existe más de una solución para la ecuación:

$$\begin{cases} x' = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

¿Qué hipótesis del teorema de Picard no se verifica?

- $x' = x^{1/2} \to \frac{x'}{x^{1/2}} = 1$ ($x \neq 0$) $\to \int x^{-1/2}\,dx = t + K$

Primitiva $2x^{1/2} \to x^{1/2} = \frac{t}{2} + \tilde{K}$

$$x(t) = \left(\frac{t}{2} + \tilde{K}\right)^2$$

$$0 = x(0) = \tilde{K}^2 \to \boxed{\tilde{K} = 0}$$

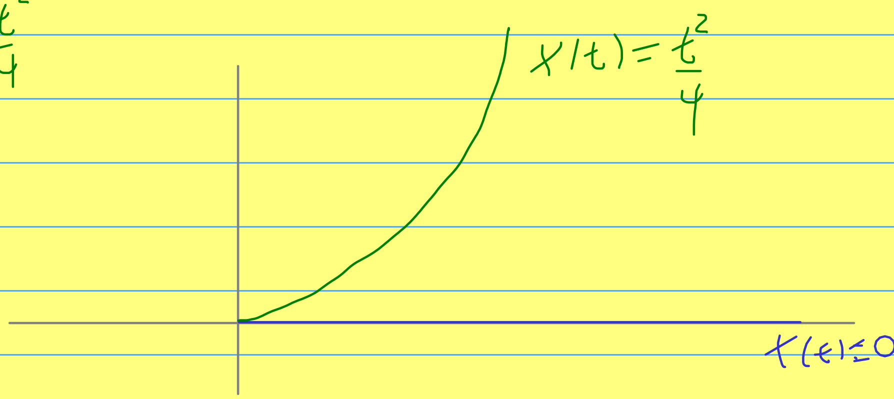
$$x(t) = \frac{t^2}{4}$$

$$x' = \frac{2t}{4} = \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} x' = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow f(t,x) = x^{1/2}$$

$x(t) = 0 \quad \forall t$ es solución.

$x(t) = \frac{t^2}{4}$



Como f es continua en 0, veamos que no es loc. Lipschitz en 0.

U entorno de 0

• Supongamos que existe $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in U$$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq K \quad \forall x, y \in U$$

Como $0 \in U$, podemos suponer $y = 0$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}}{x}\right| = \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leq K \quad \forall x \in U$$

Como $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \leq K \quad \forall x \in U$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|}_{\to +\infty} \leq K \quad \not\exists$$

$f(x)=\sqrt{x}$ no es loc. Lipschitz en $x=0$.

2. Sea la ecuación:

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si} \quad (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

a) Probar que, para todo $c \in \mathbb{R}$, $\boxed{x(t) = c^2 - \sqrt{t^4 + c^4}}$ es solución con condición inicial $x(0) = 0$.

b) ¿Qué hipótesis del teorema de Picard no se verifica?

$$x' = f(t,x) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si } (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

a) Verificar que $x' = f(t,x)$ y que $x(0)=0$

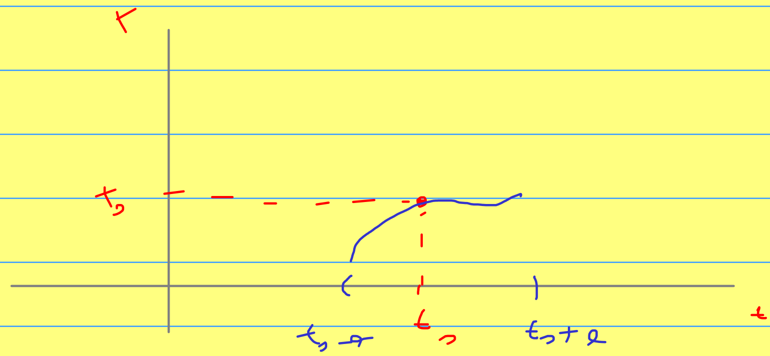
b)

• Intervalo maximal de solución

Picard: Si f ... — , entonces existe $\alpha > 0$ tq el problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

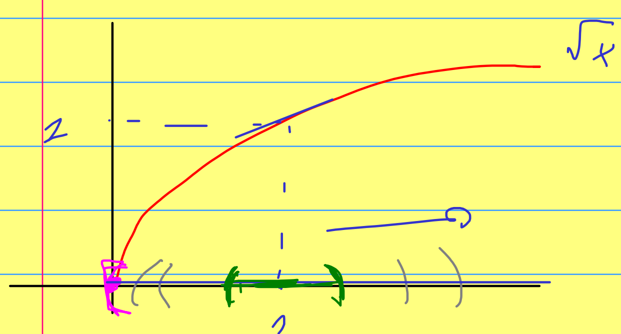
tiene solución única en $(t_0-\alpha, t_0+\alpha)$



Prop: En la hipótesis de Picard, existen soluciones maximales

Ej: $\begin{cases} f(t,x) = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ La solución no es única.

$\begin{cases} f(t,x) = x^{1/2} \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ Solución es única



En este caso el intervalo maximal de $\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(1) = 1 \end{cases}$

es $(0, +\infty)$

3.2) a) $x' = x^2 - 1$, $f(t,x) = x^2 - 1$

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$f(t,x) \in C^\infty$, aplica Picard

a todo (t_0, x_0)

$$\cdot \begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ x(t_0) = 1 \end{cases}$$

$x(t) = 1 \quad \forall t$

$\bullet \quad \frac{x'}{x^2 - 1} = 1 \rightarrow \int \frac{1}{x^2-1}\, dx = t + k$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$1 = x(A+B) - A + B \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \rightarrow A = -B \\ -A + B = 1 \end{cases}$

$\boxed{A = -1/2}$

$2B = 1 \rightarrow \boxed{B = 1/2}$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1|$$

$\rightarrow -\ln|x-1| + \ln|x+1| = 2t + \tilde{k}$

$\ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) = 2t + \tilde{k}$

$$\frac{x+1}{x-1} = Ae^{2t}$$

$$x+1 = xAe^{2t} - Ae^{2t}$$

$$x\left(1 - Ae^{2t}\right) = -1 - Ae^{2t}$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1 - Ae^{2t}}{1 - Ae^{2t}}}$$

$x(0) = 1$