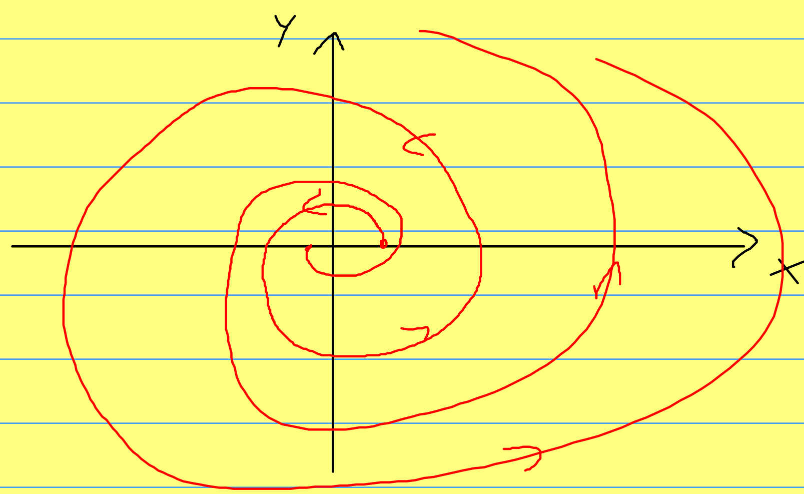
10/9

Ej: Diagrama en $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \Big(\underbrace{r_0 e^t \cos(t+\theta_0)}_{x}, \underbrace{r_0 e^t \operatorname{sen}(t+\theta_0)}_{y}, \underbrace{z_0 e^t}_{z}\Big)$$

$r_0 e^t\left(\cos(t+\theta_0), \operatorname{sen}(t+\theta_0)\right)$



$\lambda = a + ib$

$a = 0$ círculos con centro en el origen

$a > 0$ espirales que se alejan del origen

$a < 0$ " " " acercan del origen

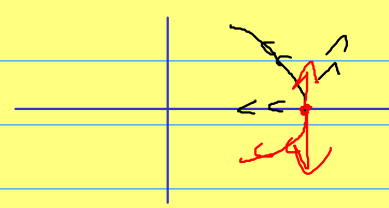
$b > 0$ es en sentido antihorario

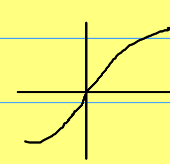
$b < 0$ " " " horario

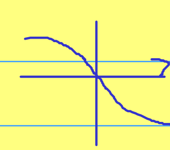
$b > 0$ $\gamma(t) = (\cos(bt), \operatorname{sen}(bt))$

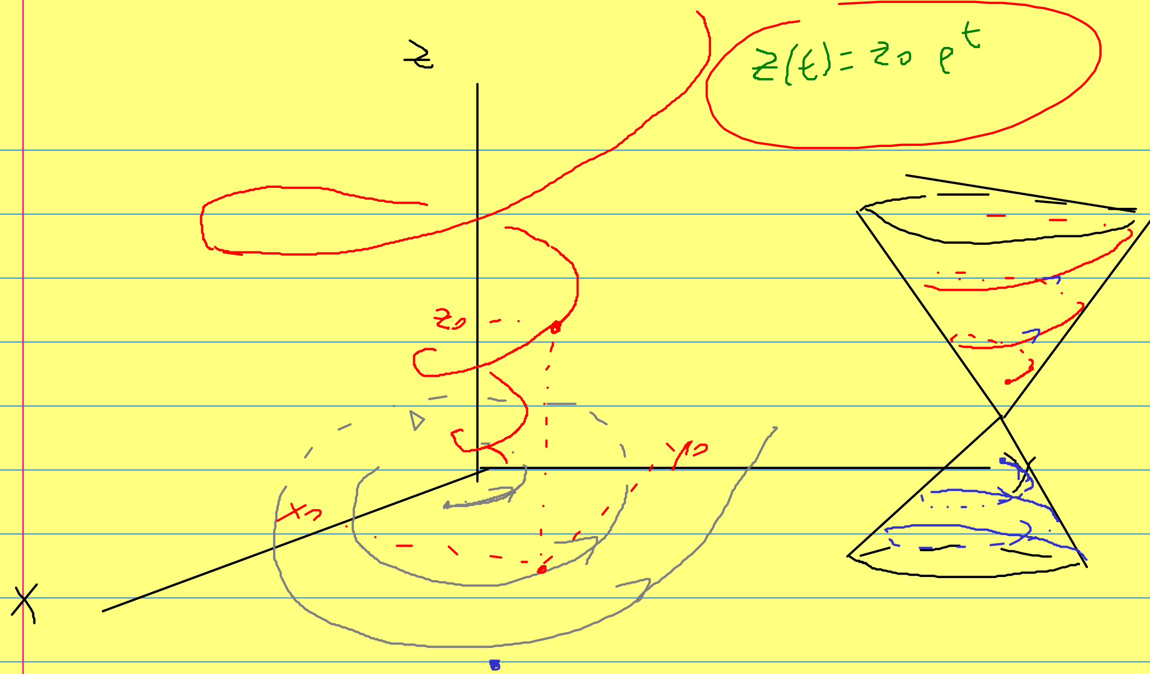
$(1, 0)$

$t = 0$





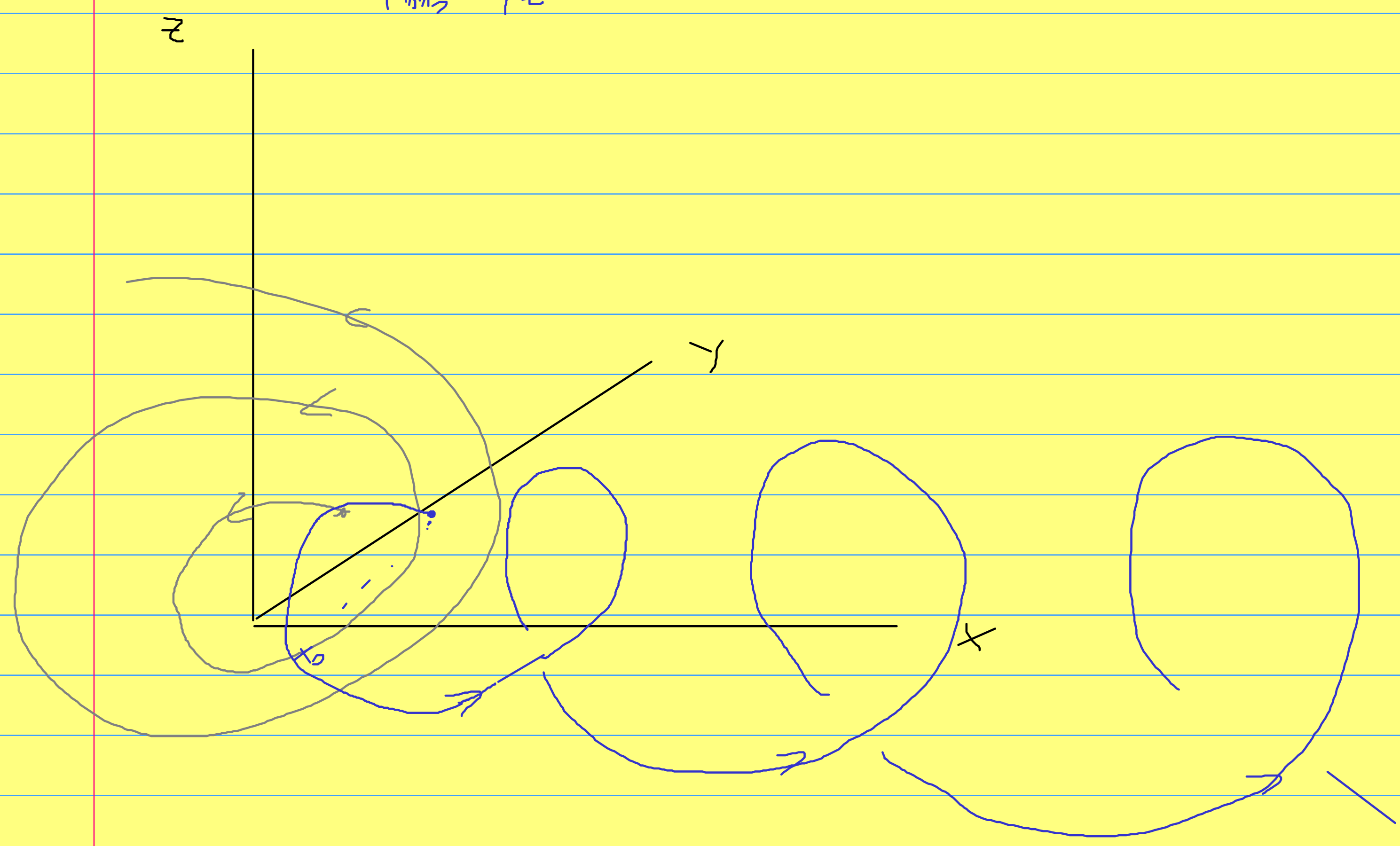




Eg: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$x(t) = x_0 e^t$

plane yz



$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x(t) = x_0\, e^{at} \\ y(t) = y_0\, e^{bt} \\ z(t) = z_0\, e^{ct} \end{array}$$

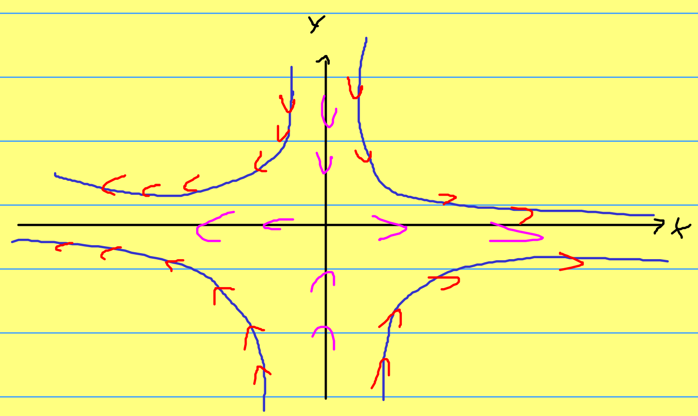
- Veamos el plano xy.

- $x(t) = x_0\, e^{at} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1}{a}$

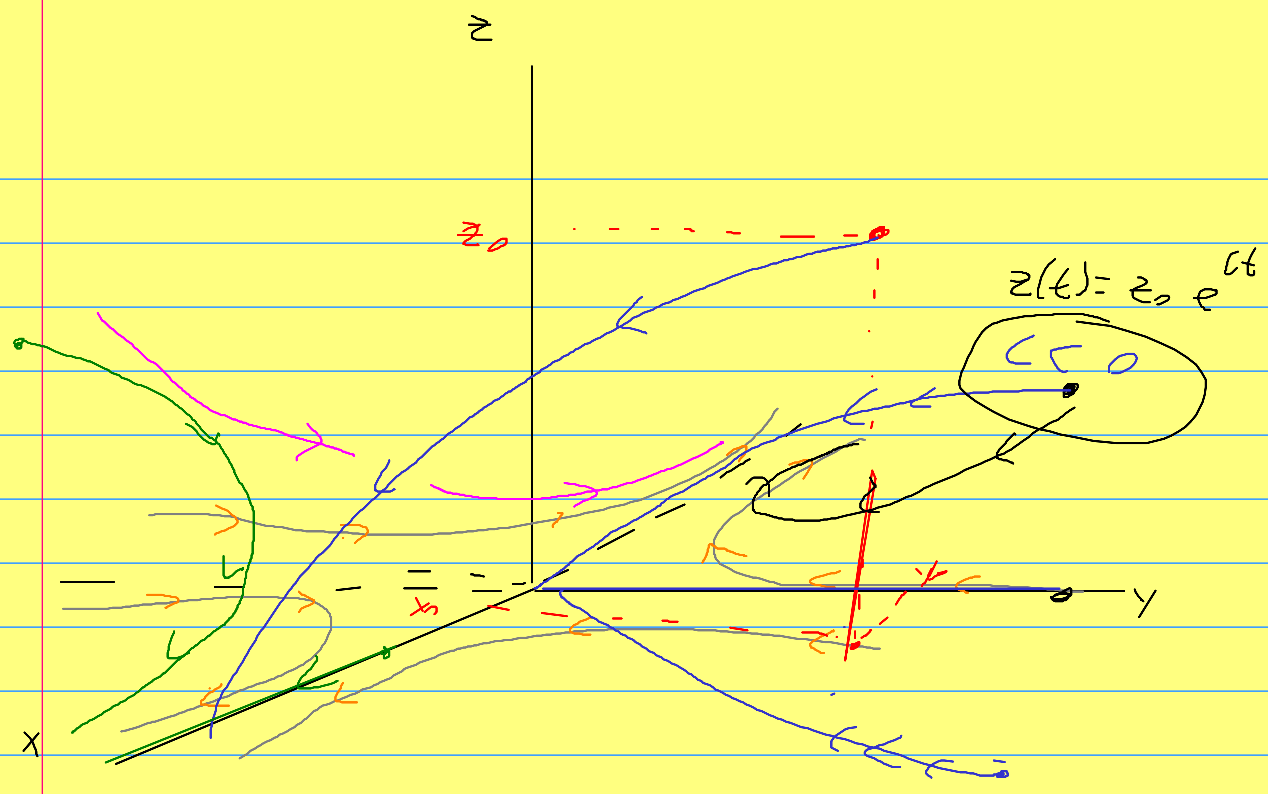
- $y(t) = y_0\, e^{bt} = y_0\, e^{\frac{b}{a} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}$ $\quad\Big|\quad b^a = e^{a \ln(b)}$

$$= y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{b}{a}} = \frac{y_0}{x_0^{\frac{b}{a}}}\, x^{\frac{b}{a}}$$

- Supongamos: $b = -a$, $a > 0$

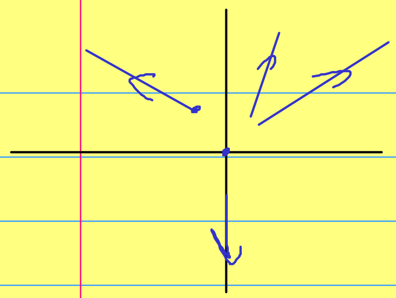


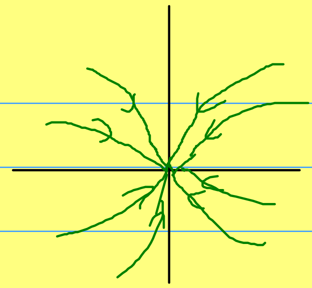
$$\begin{cases} x(t) = x_0\, e^{at} \\ y(t) = y_0\, e^{bt} \\ z(t) = z_0\, e^{ct} \end{cases}, \quad (x_0, 0, 0)$$

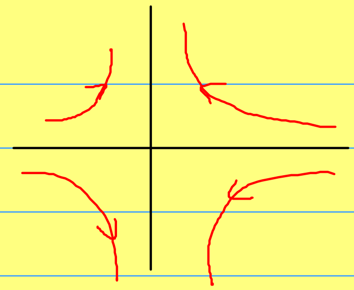


$(x_0, y_0, z_0) = (0, y_0, z_0)$

Repulsor o fuente — atractor o pozo — silla







vap positivos — vap negativos — vap de signos distintos

Caso "degenerado". Cuando un valor propio es 0

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 1$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = 0$$

Ejercicio 5 Desarrollo

Resolver el siguiente sistema reescribiendolo en forma matricial y usando valores y vectores propios:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + t \\ \dot{y} = 3x - 2y - 1 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sugerencia: buscar soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

en donde $\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix}$ es solución de la ecuación homogénea y $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ es una solución particular de la forma $\begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix}$.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

12. (a) Dada una matriz A, probar que si α no es valor propio entonces la ecuación $x' = Ax + e^{\alpha t}b$ tiene una única solución de la forma $x(t) = e^{\alpha t}u$ con $u \in \mathbb{R}^n$. Calcular u en función de A, b y α.

particular

(b) Resolver el sistema:

$$x' = 2x + y + e^{2t}$$
$$y' = x + 2y - e^{2t}$$

a) $\dot{x} = Ax + e^{\alpha t} b$ $\qquad x, \dot{x}, b \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$x(t) = e^{\alpha t} u$ es solución si y sólo si $\qquad (\alpha e^{\alpha t} u + e^{\alpha t} u')$

$\iff \alpha e^{\alpha t} u = \dot{x} = A \underbrace{x}_{e^{\alpha t}u} + e^{\alpha t} b \to$ Despejar u

$\iff \alpha \cancel{e^{\alpha t}} u = A\cancel{e^{\alpha t}} u + \cancel{e^{\alpha t}} b \qquad e^{\alpha t} > 0$

$\iff \alpha u = Au + b$

$\iff \alpha u - Au = b \qquad \alpha u = \alpha I u$

$\iff (\alpha I - A) u = b$

$$\boxed{u = (\alpha I - A)^{-1} b}$$

Luego u es único porque queda completamente determinado por A, b y α.

Obs: Como α no es vap de A, tenemos que

$\det(\alpha I - A)$
$\quad \|$
$(-1)^n \det(A - \alpha I) \neq 0$

Por lo tanto $\alpha I - A$ es invertible

$$x' = 2x + y + e^{2t}$$
$$y' = x + 2y - e^{2t}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} x + e^{\overset{\alpha}{2}t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}$$

De (a): Si 2 no es vap de A, entonces

$x_p(t) = e^{2t} u$ es una solución particular

$\Rightarrow u = (2I - A)^{-1} b$

Luego la solución general será

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde $x_h(t)$ es solución de $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x$

13. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$x' = Ax$$

donde A es una matriz $n \times n$. Se definen

$$E^s = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)<0} E_\lambda; \quad E^c = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)=0} E_\lambda; \quad E^u = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)>0} E_\lambda$$

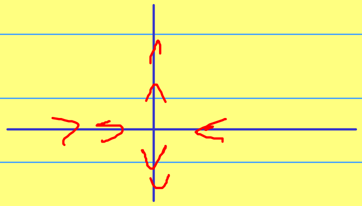
los espacios estable, central e inestable respectivamente, donde E_λ es el subespacio propio generalizado asociado al valor propio λ. Recordar que si λ es un valor propio con multiplicidad algebraica m, el subespacio propio generalizado se define como $E_\lambda = \ker\left[(A - \lambda I)^m\right]$. $\oplus$ representa la suma directa de espacios vectoriales.

(a) Demostrar que los espacios E_λ son invariantes por A.

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$

$A \cap B = \{0\}$

a) • Un subespacio E es invariante por A si al comenzar con $x_0 \in E$ entonces $x(t) \in E \ \forall t$

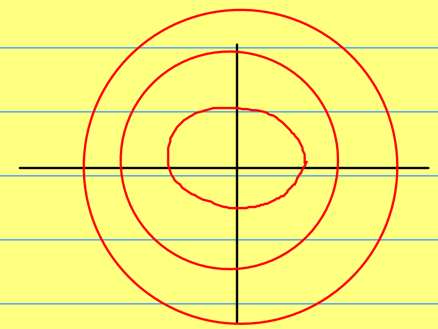


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{Vap}}$: $\lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda = \pm i$

$E^s \oplus E^c \oplus E^u = \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} E^s = \bigoplus_{Re(\lambda) > 0} E_\lambda = \emptyset \\ E^c = \bigoplus_{Re(\lambda) = 0} E_\lambda = \mathbb{R}^2 \\ E^u = \bigoplus_{Re(\lambda) < 0} E_\lambda = \emptyset \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

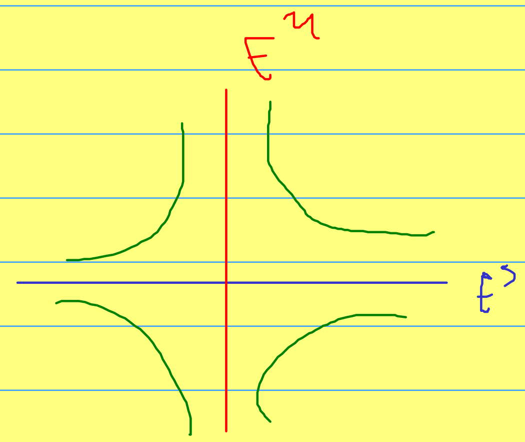
$\lambda = 1 \to E_1 = \langle (1,0) \rangle$ " = " eje x

$\lambda = -1 \to E_{-1} = \langle (0,1) \rangle$ " = " eje y

$$E^s = \bigoplus_{Re(\lambda) > 0} E_\lambda = E_1$$

$$E^c = \bigoplus_{Re(\lambda) = 0} E_\lambda = \emptyset$$

$$E^u = \bigoplus_{Re(\lambda) < 0} E_\lambda = E_{-1}$$



propios:

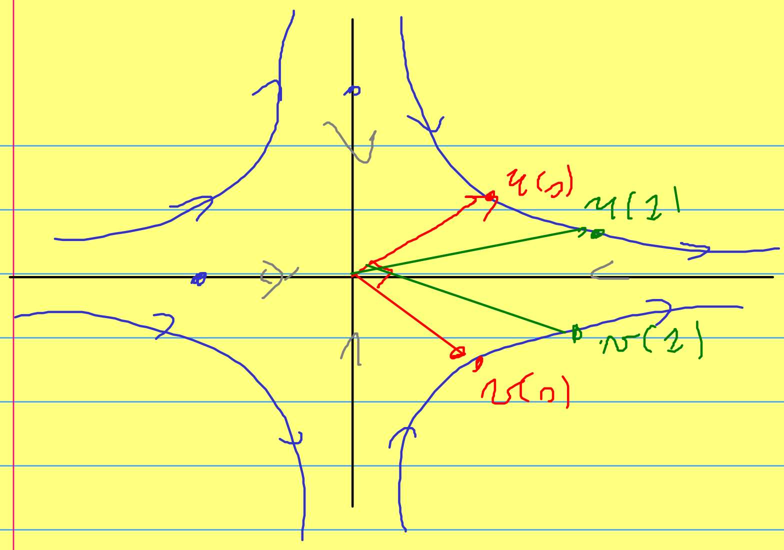
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + t \\ \dot{y} = 3x - 2y - 1 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sugerencia: buscar soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

en donde $\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix}$ es solución de la ecuación homogénea y $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ es una solución particular de la forma $\begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \tilde{D} \begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$


u(0)
u(1)
v(1)
v(0)