6) m).- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)^\alpha}\cdot\frac{1}{\cos(x)^\beta}\,dx.$ discutir según $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

La integral se separa en dos de segunda especie (a priori los ptos donde la función que se integra se va a infinito son $x=0$, $x=\pi/2$)

Tenemos $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)^\alpha}\cdot\frac{1}{\cos(x)^\beta}\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin(x)^\alpha}\cdot\frac{1}{\cos(x)^\beta}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)^\alpha}\cdot\frac{1}{\cos(x)^\beta}\,dx}_{I_2}.$

- I_1 es equivalente en 0 a $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin(x)^\alpha}\,dx$ (pues $\cos(0)=1$)

  que a su vez es equiva $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ $\left(\text{pues } \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^\alpha \xrightarrow{x\to 0} 1\right)$.

  Ya sabemos que esto converge sii $\alpha \in (-\infty,1)$

- I_2 es equivalente en $\pi/2$ a $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)^\beta}\,dx$ (pues $\sin(\pi/2)=1$).

  a su vez es equivalente a $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{(\pi/2-x)^\beta}\,dx$ $\left(\text{pues } \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{(\pi/2-x)} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin(x)}{-1}=1\right)$

  La última integral, con C.V $u=\pi/2-x$ es $\displaystyle -\int_{\pi/2}^{0} \frac{1}{u^\beta}\,du = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{u^\beta}\,du$

  Esto converge sii $\beta \in (-\infty,1)$.

  $\longrightarrow$ Concluimos que la int converge sii $\boxed{\alpha\in(-\infty,1) \text{ y } \beta\in(-\infty,1)}$

7b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha}\,dx.$ Es una integral mixta, dividimos en dos:

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha}\,dx.$

- Observando que en $x=0$ $e^{x^2}-1 \sim x^2$ (o bien hacer L'hopital dos veces, o bien usar taylor). tenemos que la primer integral es equiv a

  $I_1 \sim \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2)^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx$ que converge sii $2\alpha<1$ sii $\boxed{\alpha < 1/2.}$

- Por otro lado, en ∞ $e^{x^2}-1 \sim e^{x^2}$. Luego $I_2 \sim \int_1^\infty \frac{1}{(e^{x^2})^\alpha} dx = \int_1^\infty \frac{1}{e^{\alpha x^2}}$

que converge sii $\boxed{\alpha > 0}$ $\left(\text{pues } e^{\alpha x^2} \geq \alpha x^2 \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha x^2}} \leq \frac{1}{\alpha x^2} \right)$

Concluimos que la int converge sii $\boxed{\alpha \in (0, 1/2)}$

8 b) Recordar que $\sum_{k}^{\infty} f(n)$ y $\int_k^\infty f(x)\,dx$ tienen mismo comportamiento si $f(x) \geq 0$ y f monótona.

Tenemos que estudiar $\sum_2^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log(n)}}$. Consideramos $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log(x)}}$

- trivialmente $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 2$.
- f es monótona decreciente $\left| \text{ y tiende a } 0 \right)$: x es creciente, $\log(x)$ es creciente, $\sqrt{\cdot}$ creciente

entonces $x \cdot \sqrt{\log(x)}$ es creciente

$\Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{\log(x)}}$ es decreciente ✓.

Por lo tanto aplica el criterio serie-integral ✓
Alcanza con estudiar $\int_2^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log(x)}}\,dx$. Considerando $u(x) = \log(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$

$\hookrightarrow du = \frac{1}{x} dx$

Tenemos $\longrightarrow$ $= \int_{\log(2)}^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \infty$. $\Rightarrow$ La serie diverge

(por criterio serie-integral).