5) Sean f, g funciones derivables en $[a, +\infty)$, f', g' integrables en $[a, +\infty)$ y se verifica $\lim_{x \to +\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$.

a) $\int_a^{\infty} f'g$ converge sii $\int_a^{\infty} fg'$ converge:

Esto es casi inmediato al hacer "partes" (regla de la cadena) ⤵

$$\int_a^K f'(x)\, g(x) = f(x)g(x)\Big|_a^K - \int_a^{\infty} f(x)\, g'(x)\, dx$$

Tomando límite en $K \to +\infty$, como $\lim_{K\to\infty} f(x)g(x)\Big|_a^K = L - f(a)g(a) \in \mathbb{R}$,

se tiene que $\underbrace{\lim_{K\to+\infty} \int_a^K f'(x)g(x)\,dx \text{ existe (y es real)}}_{\int_a^{+\infty} f'g}$ sii $\underbrace{\lim_{K\to+\infty} \int_a^K f(x)g'(x)\,dx \text{ existe (y es real)}}_{\int_a^{+\infty} fg'}$.

b)

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt}_{\text{equiv a } \int_0^1 1\,dt} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt}_{\text{Usamos parte a}}$$

Si $f'(t) = \operatorname{sen}(t)$, $g(t) = \frac{1}{t}$ $\Rightarrow$ $f(t)g(t) = \frac{-\cos(t)}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.

Luego, por parte a, $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$ converge sii $\int_1^{\infty} -\cos(t) \cdot \frac{-1}{t^2}\,dt$ converge.

La segunda converge absolutamente, por lo tanto converge ✓ *

$$* \int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt \le \int_1^{\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt \le \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt < \infty.$$

$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}\,dt$ converge también, pues converge absolutamente.

2) $$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(t^2)\,dt = \int_0^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt + \int_1^{\infty} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

Sugerencia

$$= \underbrace{\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt}_{\text{finito}} + \overbrace{\int_1^{\infty} 2t\operatorname{sen}(t^2) \cdot \frac{1}{2t}\,dt}^{\text{Usamos parte a}}$$

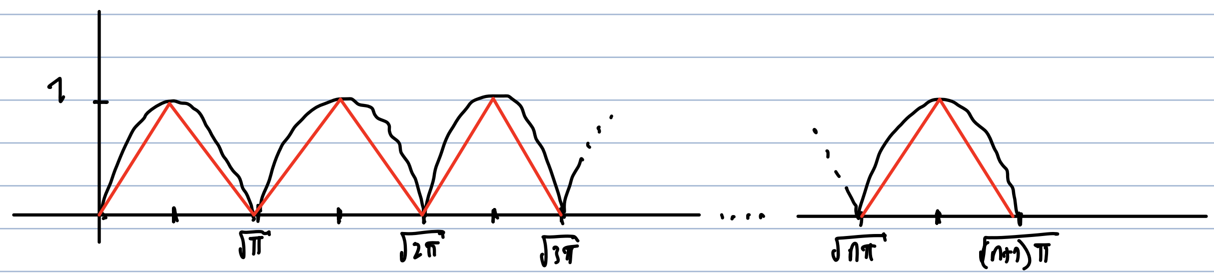
Si $f'(t) = 2t\,\text{sen}(t^2) \Rightarrow f(t) = -\cos(t^2)$. Tomamos como $g(t)$ a $g(t) = \frac{1}{2t}$.

Luego $f(t)g(t) = \frac{-\cos(t^2)}{2t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$. Por lo tanto, por parte a):

$$\int_1^\infty 2t\,\text{sen}(t^2) \cdot \frac{1}{2t}\,dt \text{ converge sii } \int_1^\infty -\cos(t^2) \cdot \frac{-1}{2t^2}\,dt \text{ converge.}$$

Lo segundo converge absolutamente ✓.

$\int_1^\infty |\text{sen}(x^2)|\,dx. \to$ Esto es el área debajo del gráfico de $|\text{sen}(x^2)|$. Dibujemos:



El área bajo el gráfico (marcado con negro) es mayor a la suma de áreas de los triángulos (marcados con rojo).

Es decir,
$$\int_0^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\text{sen}(x^2)|\,dx \geq \text{áreas triángulos} = \sum_0^n \underbrace{\left(\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}\right)}_{\text{base triángulo}} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{altura}}$$

Observar que la serie es telescópica con término gral $a_n = \sqrt{n\cdot\pi}$

Como $a_n \to +\infty$, esta serie diverge!

$\hookrightarrow$ Por lo tanto $\int_1^\infty |\text{sen}(x^2)|\,dx = +\infty$

4) a) $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

(Recordar que f y g equivalentes en ∞ si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$.)

Simplemente verificamos con $g(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ y $f(x) = g(x) + g(x)^2$.

Tenemos que $f(x)/g(x) = 1 + g(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. ✓

* **Obs**: En gral si $F(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ se tiene que $F(x) \sim F(x) + F(x)^2 = F(x)(1+F(x))$.

b) • $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ converge : Por ej. 5, tomando $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Como $f(x).g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, la integral converge sii $\int_1^\infty -\cos(x)\left(-1/2\, .\, x^{-3/2}\right)dx$ converge.

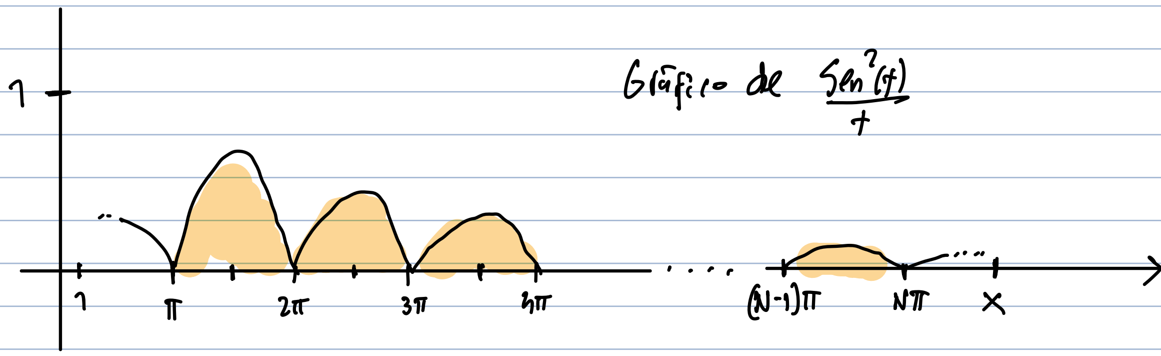
Pero $\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{3/2}}\,dx \le \frac{1}{2}\int_1^\infty \left|\frac{\cos(x)}{x^{3/2}}\right|dx \le \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} < \infty$. ✓

• $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$ diverge $\left(\Rightarrow \overbrace{\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx}^{\text{finito}} + \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x} \text{ diverge}\right)$:

Observar que $\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} \ge 0$. Por lo tanto $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt$ es creciente.

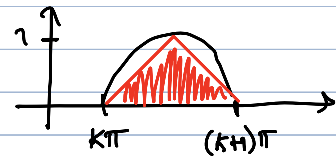
Por ejercicio 1 alcanza ver que F no es acotada para ver que diverge. $\left(\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)\right)$

Observar que $\int_1^x \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt \ge \int_\pi^{N\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt$ con N el natural más grande tq $N\pi \le x$.



Tenemos que $\int_\pi^{N\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt = \sum_1^{N-1} \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt}_{\text{Cada una de estas es una pancita amarilla.}}$

Pero $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt \ge \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{(k+1)\pi} = \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \operatorname{sen}^2(t)\,dt.$



$$\ge \frac{1}{(k+1)\pi}\cdot\Big(\underbrace{(k+1)\pi - k\pi}_{\text{base}}\Big)\cdot\overset{\text{altura}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2(k+1)}.$$

Entonces $\int_1^x \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt \ge \sum_1^{N-1} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)}$. $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t}\,dt \ge \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{(k+1)} = \infty$ ✓

c) El criterio de equivalentes no aplica ya que este es para funciones no negativas $\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right.$ toma valores negativos$\left.\right)$.