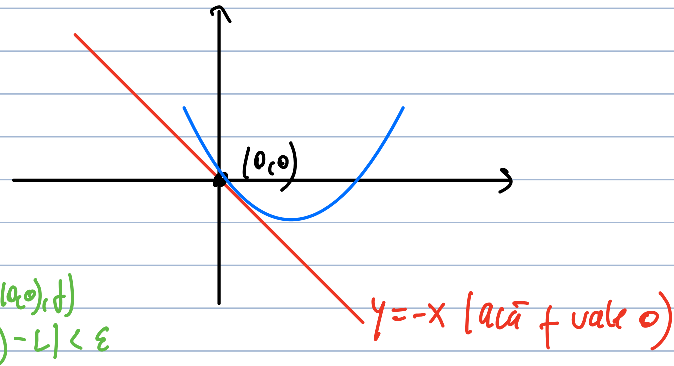
Algunos ejercicios del Práct. 7

5) c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \quad (x \neq -y) \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \quad (x = -y) \end{cases}$



Veamos que no existe el límite de f en $(0,0)$

Recordar: • $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ tq $(x,y) \in B((0,0),\delta) \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

• Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$, entonces $\lim\limits_{t\to 0} f(\alpha(t)) = L$ para toda $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua tq $\alpha(0) = (0,0)$.

(Por ejemplo α puede ser una recta, lo que llamamos límite direccional).

Entonces, si $\alpha_1(t) = (t, -t)$ (α_1 parametriza la recta roja), tenemos

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_1(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,-t) = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

y si $\alpha_2(t) = (t, t^2 - t)$ (α_2 parametriza curva azul), tenemos

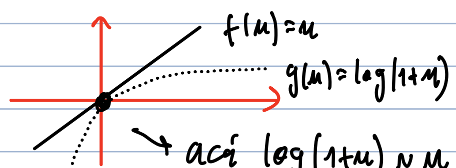
$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_2(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, t^2-t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 - t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} t - 1 = -1$$

Como acercarse por α_1 y α_2 da límites distintos, concluimos que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ✓

8) f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$:

• Recordamos que $\boxed{\log(1+u) \sim u}$ cuando $u \to 0$, es decir, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\log(1+u)}{u} = L \in \mathbb{R}$ (en este caso $L = 1$)

↳ ¿de dónde viene esto? . Una forma de pensarlo es aproximando $\log(1+u)$ con su desarrollo de Taylor en 0 :



$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots$$

ó $\log(1+u) = u + r(u)$ donde $r(u)$ el resto de orden 2: $\dfrac{r(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$

• para $\log(1+f(x,y))$ cuando $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ vale lo mismo.

Luego veremos esto con más detalle, cuando veamos desarrollo de Taylor en varias variables.
(de todas formas se pueden convencer o probarlo ustedes, las herramientas están).

Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\log(1+\overbrace{x^2+y^2}^{u})}{x^2+y^2+x^3y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+r(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x^3y} + \overset{\to 0}{\cancel{\frac{r(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}}} \right).$$

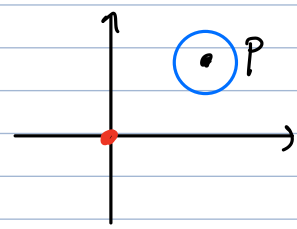
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^3y}{x^2+y^2}} \overset{*}{=} \frac{1}{1+0} = 1.$$

* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} = 0$ (pasando a polares y ejercicio 4)

11) a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 \cdot y^3}{(4x^2+y^6)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Buscamos estudiar continuidad de f.

- <u>Observación</u>: Si $p \neq (0,0)$, entonces f es continua en p,

pues existe r tq $(0,0) \notin B(p,r)$ y f restricta a $B(p,r)$ es el cociente de funciones continuas donde la función en el denominador no se anula en $B(p,r)$.



Recordar que como la continuidad en un punto es algo local, para estudiar continuidad siempre nos podemos restringir a un entorno abierto de p.

En definitiva, solo hay que estudiar lo que ocurre en $(0,0)$

- <u>Continuidad en $(0,0)$</u> (?)

Observar que en $B^*((0,0),r)$, f vale $\overbrace{\left(\dfrac{4x^2}{4x^2+y^6}\right)}^{h(x,y)} \cdot \overbrace{y^3}^{g(x,y)}$.

Es claro que $g(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Además $h(x,y)$ acotada: $\left|\dfrac{4x^2}{4x^2+y^6}\right| \leq \left|\dfrac{4x^2+y^6}{4x^2+y^6}\right| = 1$

Luego, por ejercicio 6, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Como $0 = f(0,0)$, <u>f continua en $(0,0)$</u> ✓