Seguimos pract 4.

4) <u>Criterio del cociente</u> : Si an sucesión de términos positivos tq

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$, si $L<1$, $\sum a_n < \infty$
si $L>1$, $\sum a_n = \infty$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{n!}{n^n}} \to a_n$. Intentando usar el criterio, calculamos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right] \frac{n^n}{n!} = \left[\frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{1}{(n+1)^n}\right] \frac{n^n}{\cancel{n!}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\boxed{(1+1/n)^n}} \xrightarrow{n} \frac{1}{e}$$

Recordar $e = \lim_n (1+1/n)^n$

Por el criterio, como $\frac{1}{e} < 1$, $\sum_1^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$

5) <u>Criterio de la raíz</u> : Si an suc. términos positivos tq

$a_n^{1/n} \to L$, si $L<1$, $\sum a_n < \infty$
si $L>1$, $\sum a_n = \infty$.

a) $\sum_1^{\infty} \boxed{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}} \to a_n$

$$a_n^{1/n} = \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{*} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \sum_1 a_n < \infty$$

✓

$$* \quad (2n-1)^{1/n} = e^{\log\left((2n-1)^{1/n}\right)} = e^{\frac{1}{n}\log(2n-1)} \quad (\tfrac{1}{n}\log(2n-1) \to 0) \quad \to e^0 = 1.$$

6) $a_n \geq 0$, $\sum a_n < \infty$. ( $\Rightarrow$ necesariamente $a_n \to 0$ )

- a) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n} \to \infty$ $\longrightarrow$ diverge
- b) $\sum_1^{\infty} a_n^2$ $\longrightarrow$ <u>Por comparación</u>, a partir del cierto $n$, $a_n^2 < a_n$
  $\Rightarrow \sum a_n^2 < \infty$.
- c) $\sum_1^{\infty} \sqrt{a_n}$ $\longrightarrow$ no podemos afirmar nada sobre convergencia. (ejemplos).
- d) $\sum_1^{\infty} \log(1+a_n)$ $\longrightarrow$ por equivalencia converge pues $\sum \log(1+a_n) \sim \sum a_n$.
  $\log(1+u) \sim u$ con $u \to 0$

Eg: Si $a_n = \frac{1}{n^2}$, a) $\sum n^2$ diverge
b) $\sum \frac{1}{n^4}$ converge.
c) $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Si $a_n = \frac{1}{n^4}$, a) $\sum n^4$ diverge
b) $\sum \frac{1}{n^8}$ converge.
c) $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

7) • Criterio de Leibnitz: Si an de términos positivos, an decrece de forma monótona a 0.

Entonces $\sum_1^\infty (-1)^n a_n < \infty$

• Decimos que $\sum a_n$ converge absolutamente si $\sum |a_n| < \infty$.

• Lema: Si $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$. (el recíproco no vale)

c) $\sum_1^\infty (-1)^n \underbrace{\left(\frac{n}{6n-5}\right)}_{a_n}$

• ¿Converge abs?: $\sum \frac{n}{6n-5}$ diverge pues $\frac{n}{6n-5} \to \frac{1}{6}$

• ¿Converge? el término gral $(-1)^n \frac{n}{6n-5}$ no tiende a 0 por lo que no cumple condición necesaria. (No converge).

Más aún: Además tampoco diverge, a partir de cierto n tengo algo similar a $\sum (-1)^n \frac{1}{6}$.

Dicho de otra forma no existe $\lim_{K\to\infty} \sum_1^K (-1)^n \frac{n}{(6n-5)}$

b) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+1}$

$= \sum_1^\infty (-1)(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

• ¿Conv. abs? $\sum \frac{n}{n^2+1} \sim \sum \frac{1}{n} = \infty$. (diverge).

• ¿Conv? Si, por criterio de Leibnitz

(hay que corroborar $a_n = \frac{n}{n^2+1} \searrow 0$)

Una forma rápida de ver que $\frac{n}{n^2+1}$ decreciente es estudiar $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Como $f'(x) < 0$ si $x > 1$, entonces f decreciente $\Rightarrow \frac{n}{n^2+1}$ también.

8). b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\log(n+1)} \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

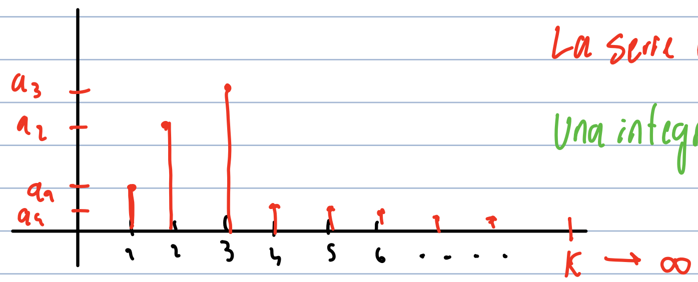
Observar que $\log(n+1) < n+1 \Rightarrow \frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$.

y sabemos $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$

Por comparación $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \infty$ (y la serie original también).

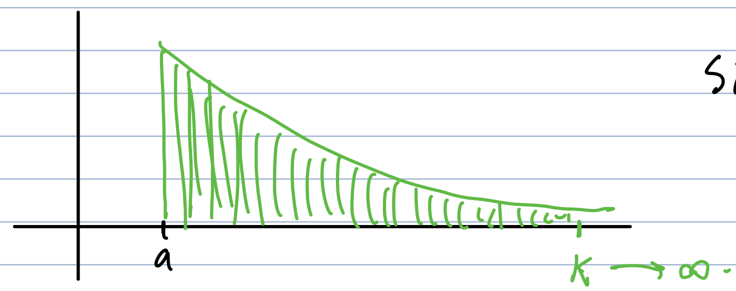
---

Algunas cosas de impropias.




La serie es sumar la altura de los puntitos rojos.

Una integral impropia de primera especie es generalizar esto a "una suma continua".




Si $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}^+$ función continua, definimos $\int_a^\infty f$ como $\lim_{K\to\infty} \int_a^K f$.