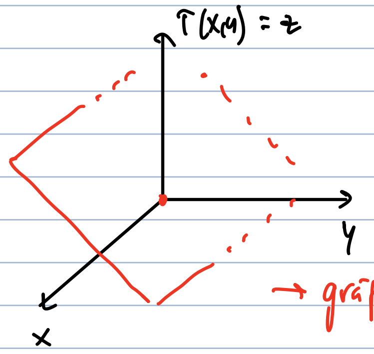
Terminamos pract 8:

- Recordar: f dif en un pto $p \in \mathbb{R}^2$ si $\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - d_p f(v)}{\|v\|} = 0$

- Observación: si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ T. lineal, entonces su gráfico es un plano



Ecuación del plano tangente: $f(p+v) \approx f(p) + d_p f(v)$ para v cerca de 0

$f(x,y) \approx f(p) + d_p f((x,y) - (p_1,p_2))$

$* \; (p_1,p_2) + (v_1,v_2) = (x,y)$

Ecuación del plano tangente en punto p es $z_p(x,y) = f(p) + d_p f((x,y) - (p_1,p_2))$

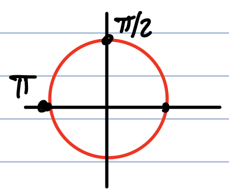
17) b) $f(x,y) = 2\cos(x-y) + 3\sin(x)$, $p = (\pi, \pi/2)$.

- Calculo ∇f:
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\sin(x-y) + 3\cos(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\sin(x-y) \end{cases}$$

La ecuación del tangente es $z_p(x,y) = f(p) + d_p f((x,y) - (p_1,p_2))$

$z_p(x,y) = f(\pi,\pi/2) + [\nabla f(\pi,\pi/2) \cdot (x-p_1, y-p_2)]$

- $\nabla f(\pi,\pi/2) = (-2\sin(\pi/2) + 3\cos(\pi), 2\sin(\pi/2))$
$= (-2-3, 2) = (-5,2)$



- $f(\pi,\pi/2) = 2\cos(\pi/2) + 3\sin(\pi) = 0$.

$z_p(x,y) = 0 + (-5,2) \cdot (x-\pi, y-\pi/2)$

$$\boxed{z_p(x,y) = -5(x-\pi) + 2(y-\pi/2)}$$ ecuación plano tangente.

c) $f(x,y) = 2xy + e^{xy}x \quad , \quad p=(1,1)$

- $\nabla f(x,y) = (2y + e^{xy} + x.y\,e^{xy},\ 2x + x^2 e^{xy})$

  $\nabla f(1,1) = (2+2e,\ 2+e)$

- $f(1,1) = 2+e$

$$\boxed{z_p(x,y) = \underbrace{2+e}_{f(1,1)} + \underbrace{(2+2e,\ 2+e)\cdot(x-1,\ y-1)}_{\nabla f(1,1)\cdot(x-p_1,\ y-p_2)}}$$

ec. plano tangente en $p=(1,1)$.

Práctico 9 : Taylor.

Tenemos f de clase C^n, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Definimos el diferencial de f en (p_1, p_2) de orden $k \leq n$ como

$$D_p^k f(v_1,v_2) = \sum_{j_1+j_2=k} \binom{k}{j_1,j_2} \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1}\partial y^{j_2}}(p).\ v_1^{j_1}.v_2^{j_2} \qquad \binom{k}{j_1,j_2} = \frac{k!}{j_1!\,j_2!}$$

Si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\quad D_p^k f(v_1,v_2,v_3) = \sum_{j_1+j_2+j_3=k} \binom{k}{j_1,j_2,j_3} \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1}\partial y^{j_2}\partial z^{j_3}}(p)\ v_1^{j_1} v_2^{j_2} v_3^{j_3}$

$$\binom{k}{j_1,j_2,j_3} = \frac{k!}{j_1!\,j_2!\,j_3!}$$

Por ejemplo dif de orden 2 es

$$D_p^2 f(v_1,v_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(p).v_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(p)\,v_2^2 + 2.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p)\,v_1 v_2$$

Teorema Taylor : $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1}, $p \in U$. Entonces

$$\boxed{f(p+v) = f(p) + d_p f(v) + \frac{d_p^2 f(v)}{2!} + \cdots + \frac{d_p^k f(v)}{k!} + r_k(v)}$$

donde $r_k(v)$ cumple $\lim_{v \to 0} \frac{r_k(v)}{\|v\|^k} = 0$.

(De hecho $r_k(v) = d_q^{k+1} f(v) \cdot \frac{1}{k+1!}$ con $q \in [p, p+v]$.)

Cambiando notación $f(x,y) = f(p_1,p_2) + d_p f(x-p_1, y-p_2) + \cdots + \frac{d_p^k (x-p_1, y-p_2)}{k!}$
$+ r_k(x-p_1, y-p_2)$

1) a) $f(x,y) = g(x)h(y)$ $\Rightarrow$ El taylor de f se recupera con los taylor de g y h.

b) $g(f(x,y))$ Suponiendo que $f(0,0)=0$ y conocemos taylor de f en $(0,0)$ y el de g en $0 = f(0,0)$

Entonces recuperamos el taylor de $g \circ f$ componiendo los de f y g.

2) Recordamos algunos taylor de Cálc. 1 :

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$
- $\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$

a) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2}$

Si $f(x,y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$, $\Rightarrow f(x,y) = f(0,0) + d_{(0,0)} f(x,y) + \frac{d^2_{(0,0)} f(x,y)}{2!} + r_2(x,y)$

con $\frac{r_2(x,y)}{\|x,y\|^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Sustituyendo $\frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = \frac{xy - (\text{pol. taylor orden 2})}{x^2+y^2} - \frac{r_2(x,y)}{x^2+y^2}$ $\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - (\text{pol taylor orden 2})}{x^2+y^2}$$

Por ejercicio 1a) pol taylor de orden 2 de $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ se recupera con los taylor de $\sin(x)$ y $\sin(y)$

$$(\sin(x)\sin(y)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + r_3(x)\right)\left(y - \frac{y^3}{3!} + r_3(y)\right) =$$

$$= xy \underbrace{- \frac{xy^3}{3!} - \frac{yx^3}{3!} + \frac{x^3y^3}{3!\,3!} + r_3(x).(\sim) + r_3(y)(\sim)}_{r_2(x,y)}$$

$$= \underbrace{xy}_{\text{pol. taylor de orden 2}} + r_2(x,y)$$

$xy - \text{pol taylor orden 2} = xy - xy = 0$,

concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} = 0$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{e^{x^2+y(y+1)}}^{f(x,y)} - \left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2}$$

- **Observación**: Alcanza con ir hasta orden 2 (mismo raz que ej anterior)

$f(x,y) = e^{x^2}.e^{y(y+1)} = g(x).h(y)$.

- $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + r_2(x^2)$

$e^u = \underbrace{1+u}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3!}+\dots$

$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + r_4(x)$

$= \underbrace{1+x^2}_{\text{pol taylor orden 2 de } e^{x^2}} + r_2(x)$

- $e^{y(y+1)} = 1 + y(y+1) + \frac{(y(y+1))^2}{2} + r_3(y^2) = 1 + y(y+1) + \frac{y^2}{2} + r_2(y)$.

Luego $f(x,y) = (1+x^2+r_2(x))\left(1 + y(y+1) + \frac{y^2}{2} + r_2(y)\right) = 1 + y(y+1) + \frac{y^2}{2} + x^2 + r_2(x,y)$

Entonces $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2}e^{y(y+1)} - \left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{1}+y^2+\cancel{y}+\cancel{y^2/2}+x^2-(\cancel{1}+\cancel{y}+\cancel{y^2/2})}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

[illegible]