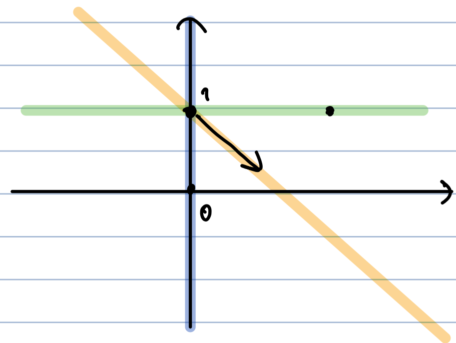
Práctico 8:

13) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq
$$\begin{cases} f(x,1) = x^3 + x^2, & x \neq 0 \\ f(0,y) = y^2 - 2y + 1 \\ f(x, 1-x) = x \end{cases}$$



a) ¿Dónde se puede hallar $\frac{\partial f}{\partial x}$? ¿y $\frac{\partial f}{\partial y}$?

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t \to 0} \boxed{\frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t}}$. En los únicos lugares donde conozco $f(x+t,y)$ son en los ptos (x,y) sobre la recta $(x,1)$.

Además, si estoy parado en $(x,1)$, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 3x^2 + 2x}$.

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ solo se puede calcular en la recta azul (ptos de la forma $(0,y)$).

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y - 2}$$

b) Calculemos $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ con $v = (1,-1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,1) + t(v_1, v_2)) - f(0,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 1-t) - f(0,1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t - 0}{t} = 1$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = 1}$$

c) ¿Dónde se puede decir algo sobre la diferenciabilidad?

- No podemos afirmar la diferenciabilidad en ningún pto
(para calcular límite de definición de diferenciabilidad necesito info de un entorno abierto del punto, que acá no tengo).

- Sin embargo, sí puedo afirmar que no es dif. en el punto $(0,1)$.

Prueba

Si fuera dif en el punto $(0,1)$ el diferencial sería $d_{(0,1)} f(v_1, v_2) = \nabla f(0,1) \cdot (v_1, v_2)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) v_2$$

Además, (si fuera dif) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = d_{(0,1)} f(v)$.

Por parte a), $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$ $\Rightarrow$ $d_{(0,1)} f(v_1, v_2) = 0 \quad \forall v_1, v_2$

Por parte b),

$$d_{(0,1)} f(1,-1) = \frac{\partial f}{\partial (1,-1)}(0,1) = 1$$

Abs.

Conclusión, no es diferenciable en $(0,1)$.

Hasta ahora trabajamos con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

¿Y funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$? Una función $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ se puede pensar como

$F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \; / \; F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$

donde f_1, f_2 van a $\mathbb{R}$.

- La definición de diferenciabilidad de F es la misma pero la transf. lineal va a $\mathbb{R}^m$ en lugar de $\mathbb{R}$. En el ejemplo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transf. lineal (diferencial) en un punto p es

$$d_p F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ lineal donde } d_p f(v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(p) \end{pmatrix} \cdot (v)$$

Esto es lo que se llama Matriz Jacobiana $\boxed{J_p f}$ (matriz asociada a $d_p F$).

$$d_p f(v) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \nabla f_2(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

- Regla de la cadena:

$p \mapsto f(p) \to g(f(p))$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

Si f dif. en p, g dif en $f(p)$ entonces $g \circ f$ es dif en p si su diferencial verifica

$$\boxed{d_{g \circ f}(p) = d_{f(p)} g \circ d_p f.}$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{d_p f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{d_{f(p)} g} \mathbb{R}^k$$

En términos de matrices Jacobianas esto es

$$\boxed{J_{g \circ f}(p) = J_{f(p)} g \cdot J_p f.}$$

15) b) $f(x,y,z) = (\underbrace{e^{z+x+y}}_{f_1(x,y,z)}, \underbrace{x+y+2z}_{f_2(x,y,z)})$, $a=(0,1,2)$. $(f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$

$$J_a f = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a)\end{pmatrix}$$

- $\frac{df_1}{dx}(x,y,z) = e^{z+x+y}$, $\frac{df}{dy}(x,y,z) = e^{x+y+z}$, $\frac{df}{dz}(x,y,z)=e^{x+y+z}$

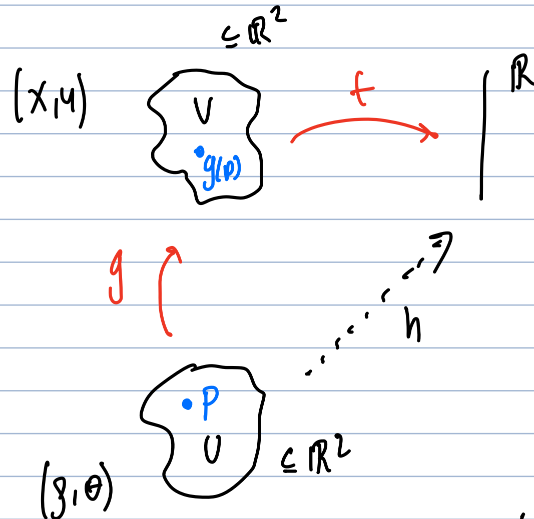
$\hookrightarrow \nabla f_1(a) = \nabla f_1(0,1,2) = (e^3,e^3,e^3)$

- $\frac{df_2}{dx}(x,y,z) = 1$, $\frac{df}{dy}(x,y,z) = 1$, $\frac{df}{dz}(x,y,z) = 2$

$\hookrightarrow \nabla f_2(a) = \nabla f_2(0,1,2) = (1,1,2)$

Entonces $J_{(0,1,2)} f = \begin{pmatrix} e^3&e^3&e^3\\1&1&2\end{pmatrix}$ y $d_{(0,1,2)} f(v_1,v_2,v_3) = \begin{pmatrix} e^3&e^3&e^3\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$.

11). $f: V\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g: U\subset \mathbb{R}^2 \to V$ donde f dif y g coord polares



Queremos calcular $d_{f\circ g}(p)$

Si le llamamos $h = f\circ g$, $\nabla h(p) = \left(\frac{dh}{d\rho}(p), \frac{dh}{d\theta}\right)$

Recordar que $g(\rho,\theta) = (\underbrace{\rho\cos\theta}_{g_1}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{g_2})$.

Por regla de la cadena $\nabla h(p) = J_p h = J_{g(p)} f \cdot J_p g$.

$$J_p g = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}, \quad J_{g(p)} f = \left(\frac{df}{dx}(g(p)), \frac{df}{dy}(g(p))\right)$$

$p=(\rho,\theta)$, $J_{g(p)} f = J_{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)} f = \left(\frac{df}{dx}(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta), \frac{df}{dy}(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\right)$

$$\boxed{\nabla h(p) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta&\rho\cos\theta\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{df}{dx}(\dots)\\ \frac{df}{dy}(\dots)\end{pmatrix} (\cdot\,,\,\cdot)}$$

$$\hookrightarrow \; = \left(\frac{df}{dx}(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta - \frac{df}{dy}(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \,, \right.$$

$\frac{dh}{d\rho}(\rho,\theta)$

$\frac{dh}{d\theta}(\rho,\theta)$

$$\left. \frac{df}{dx}(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{df}{dy}(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\cos\theta \right)$$