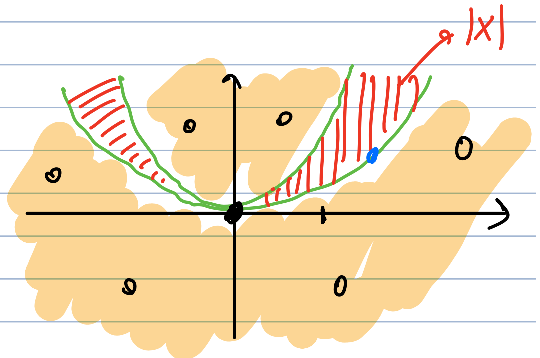
Práctico 8 :

- $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p \in U$. Decimos que f diferenciable en p si existe una transf. lineal $d_p f$ que verifica
$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(p+v) - f(p) - d_p f(v)}{\|v\|} = 0.$$

A tener en cuenta :

- Si f diff en $p \Rightarrow f$ continua en p.
- Si f diff en $p \Rightarrow$ existen todas las deriv. direccionales en p. Además
$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = d_p f(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right), (v_1,v_2) \right\rangle$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(p)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\, v_2.$$
- Si existen las deriv. parciales de f en p y son continuas en p, entonces f es diff en p.

6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \le x^2 \text{ o } 2x^2 \le y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$



→ conj nivel de 0.

Afirmación 1 : f continua en $(0,0)$.

Prueba : Hay que ver $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Hay que ver $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ tq $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$

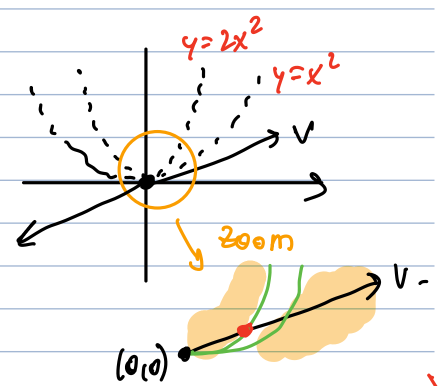
Alcanza con tomar $\delta = \varepsilon$, pues si $\|(x,y)\| < \underset{= \delta}{\varepsilon} \Rightarrow |x| < \varepsilon \overset{*}{\Rightarrow} |f(x,y)| < \varepsilon$ ✓

$*\left[\begin{array}{l} \text{Si } f(x,y) = |x| \Rightarrow |f(x,y)| = |x| < \varepsilon \\ \text{Si } f(x,y) = 0 \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon. \end{array}\right.$

Afirmación 2 : $\forall v \in \mathbb{R}^2\ \exists \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Prueba : Tomamos (v_1,v_2) cualquiera, suponemos $v_2 > 0$, $v_1 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 0.$$



Observar que si t suf chico, $f(\underset{x}{tv_1}, \underset{y}{tv_2}) = 0$.
$\left(\text{Si } t<0, \ f(tv_1, tv_2) = 0 \right)$.

$\left(\text{bastaría a partir de cuando } y > 2x^2, \right.$
es decir $\quad tv_2 > 2(tv_1)^2$
$t>0 \quad tv_2 > 2v_1^2 t^2$
$v_2 > 2v_1^2 t$
$\left. t = \frac{v_2}{2v_1^2} \right)$

<u>Afirmación 3</u> : f no es diff en $(0,0)$.

Si fuera diff en $(0,0)$, necesariamente el diferencial en $(0,0)$ sería $d_{(0,0)} f(v) = \overbrace{\nabla f(0)}^{=0} \cdot v$
(es decir, la transf lineal nula). $= 0$.

Por lo tanto, si fuera diff en $(0,0)$

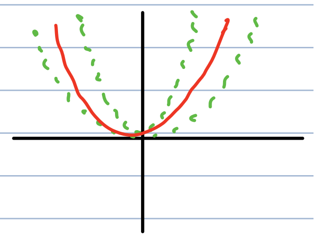
$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v) - \overbrace{f(0)}^{=0} - \overbrace{d_{(0,0)} f(v)}^{=0}}{\|v\|} = \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v)}{\|v\|} = 0.$$

Sin embargo este límite no existe :

Nos acercamos por curvas al $(0,0)$ y vemos que dan lim distintos o no existen.

- Si nos acercamos por $(v_1,v_2) = (t,0)$, entonces $f(t,0) = 0$ y $\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{\|(t,0)\|} = 0$
- Si nos acercamos por la curva $y = 3/2\, x^2$ $\left((v_1,v_2) = (t, \frac{3}{2}t^2) \right)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t, \frac{3}{2}t^2)}{\|(t, \frac{3}{2}t^2)\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + \frac{9}{4}t^4}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{|t|}}{\cancel{|t|}\sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2}} = 1$$



<u>Entonces límite no existe</u> (no es diff en $(0,0)$).

9) $\quad f(x,y) = (x^2+y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \left(f(x,y) = 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \right)$.

a) Existen deriv. parciales en todo $\mathbb{R}^2$.

<u>Si $(x,y) \neq (0,0)$</u> :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \frac{(-2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

Si $(x,y)=(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^{\cancel{2}}\cdot\sin(1/t^2)}{\cancel{t}} = 0 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$ (mismo razonamiento).

b) Veamos f diff en $(0,0)$:

¿Quién es el candidato a diferencial (transf. lineal)? Transf. lineal nula.

$$d_p f(v) = \nabla f(p)\cdot v = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(p)}_{=0}.v_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(p)}_{=0}.v_2 = 0 .$$

Estudiamos el sig límite:

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)}\frac{f(0+v) - \overbrace{f(0)}^{=0} - \overbrace{d_{(0,0)}f(v)}^{=0}}{\|v\|} = \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)}\frac{(v_1^2+v_2^2).\sin\left(\frac{1}{v_1^2+v_2^2}\right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

$$= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sin\left(1/v_1^2+v_2^2\right)}_{\text{acotado}} = 0$$

Entonces f es dif. en el punto $(0,0)$.

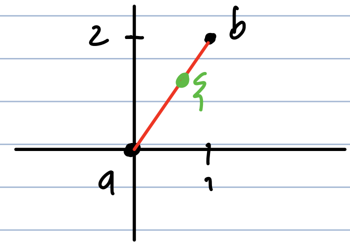
c) f no es de clase C^1: (ser de clase C^1 es tener deriv. parciales hasta orden 1 y continuas)

$\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$ ($\frac{\partial f}{\partial y}$ tampoco)

es decir $\lim_{(x,y)\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

De hecho $\nexists \lim_{(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (aparece $\overbrace{\cos\left(1/x^2+y^2\right)}^{\text{oscila}}\cdot\underbrace{\frac{-2x}{(x^2+y^2)}}_{\to\infty}$)

10) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3y$



Buscamos ξ en el segmento $[a,b]$ tq

$$f(b)-f(a)=d_\xi f\,(b-a).$$

- $f(b)-f(a)=f(1,2)-f(0,0)=1^3\cdot 2-0^3\cdot 0=2.$

Reescribimos

$$\boxed{2=d_\xi f\,(1,2)=\nabla f(\xi)\cdot(1,2)}$$

- Parametrizamos $[a,b]$ como $(t,2t)$, $t\in[0,1]$. (ξ es de la forma $(t,2t)$ para cierto t. ese t es el que busco.)

- $\nabla f=\left(\frac{df}{dx},\frac{df}{dy}\right)=(3x^2y,\ x^3)$

$$\Rightarrow\quad \nabla f(\xi)=\nabla f(t,2t)=(3t^2\cdot 2t,\ t^3)=(6t^3,t^3)$$

$$\boxed{2=(6t^3,t^3)\cdot(1,2)=6t^3+2t^3=8t^3}\ \to\ t^3=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

$$t=\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}=t_0.$$

Entonces $\xi=(t_0,2t_0)$ ✓