Seguimos Práctica 3:

3) a). $a_n = \frac{\cos(n)}{n} = \underbrace{\cos(n)}_{\text{acotado}} \cdot \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} . \longrightarrow 0$

b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightsquigarrow \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\underbrace{\boxed{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}_{\to +\infty}}$

$a_n \longrightarrow 0$

*) $\frac{an^2 + 2bn + c}{2n^2 + 8} . \longrightarrow \frac{a}{2}$

d) $\sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$, $\alpha, \beta \geq 0$.

Obs: Si $\beta = \alpha$, $a_n = \sqrt[n]{2\alpha^n} = 2^{1/n} \cdot \alpha$.
Como $2^{1/n} \to 1$, $a_n \to \alpha$.

- Vamos a suponer $\alpha > \beta$:

$\alpha^n \leq \alpha^n + \beta^n \leq \alpha^n + \alpha^n = 2\alpha^n. \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\sqrt[n]{\alpha^n} \\ \shortparallel \\ \alpha\end{matrix}} \leq \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq \boxed{\begin{matrix}\sqrt[n]{2\alpha^n} \\ \shortparallel \\ 2^{1/n}\cdot\alpha .\end{matrix}}$

es cte $= \alpha$ — tiende a α.

Entonces necesariamente $a_n \to \alpha = \max\{\alpha, \beta\}$.

(Si $\beta > \alpha$, $a_n \to \beta$).

f) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$ (Obs: Si α negativo, $a_n = \overbrace{\frac{1}{n^{-\alpha}}}^{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{1}{e^n}}^{\to 0} \to 0$)

El caso interesante es $\alpha > 0$.
Suponemos $\alpha > 0$.

$n^\alpha = e^{\log(n^\alpha)} = e^{\alpha \log(n)} . \Rightarrow a_n = e^{\alpha \log(n)} \cdot e^{-n} = e^{\alpha \log(n) - n}.$

n tiende a ∞ "más rápido" que log. ($\alpha \log(n) - n \to -\infty$).

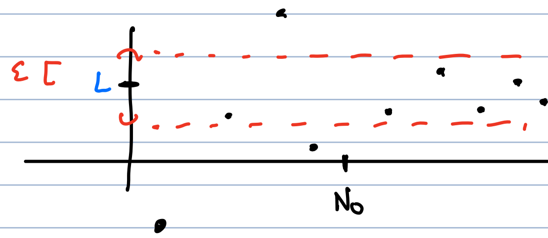
$\boxed{\alpha \log(x) - x \to -\infty .}$

Luego, $a_n = e^{\alpha \log(n)\cdot n} \to$ "$e^{-\infty}$" $= 0$.

g) [Sacar factor común 3^n en numerador y 3^{n+1} en denominador.] $\leftarrow$

4) Recordamos que a_n tiene límite L sii

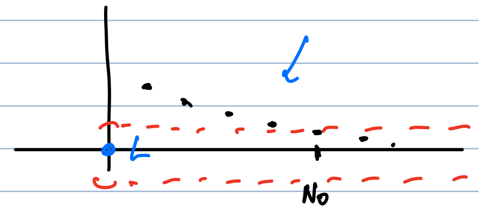
$\forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\exists N_0 \text{ tq } \forall n \geq N_0}\ |a_n - L| < \varepsilon$



a) $a_n = \frac{1}{n}$, tiende a 0 ($L = 0$).

Nos dan ε (entorno de L) y tenemos que buscar N_0 tq $\forall n \geq N_0$ $|a_n - L| < \varepsilon$

· Obs que $|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$



Como $\frac{1}{n}$ es decreciente, alcanza con tomar N_0 tq $\frac{1}{N_0} \leq \varepsilon$. Tomamos N_0 como el primer natural tal que $\boxed{N_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}}$

(Por ejemplo, si $\varepsilon = 1/10 \Rightarrow 1/\varepsilon = 10$. Tomamos $N_0 = 10$.
Si $\varepsilon = 1/100 \Rightarrow 1/\varepsilon = 100$. Tenemos $N_0 = 100$.)

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. $L = 0$. El raz. es exactamente el mismo.

$[\ |a_n - L| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$. $L = 1$. $\left(a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \right)$

Luego $|a_n - L| = \left|\cancel{1} - \frac{1}{n+1} - \cancel{1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Luego lo mismo que antes.

$L = \lim a_n$.

d). $a_n = \frac{1}{n!}$. $L = 0$. $|a_n - L| = \left|\frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!} \left(< \frac{1}{n} < \varepsilon \right)$

Comentario: Si consigo N_0 tq $\forall n \geq N_0$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$

entonces $\forall n \geq N_0$ $\frac{1}{n!} < \varepsilon$.

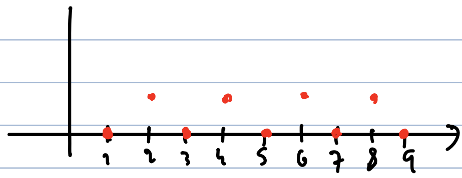
$\Rightarrow$ Puedo usar mismo N_0 que en a (Ojo! Este N_0 no es el óptimo).

---

5) a_n sucesión de reales. Una subsucesión es tomar infinitos puntos de los $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respetando el orden.

(Por ej. puedo tomar subsucesión de los pares: a_{2n})

a) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$



a_n es $\begin{cases} 1 & \text{en pares} \\ 0 & \text{en impares.} \end{cases}$

Si nos tomamos a_{2n} y a_{2n+1} tenemos $\begin{cases} a_{2n} = 1 \text{ cte. (en part } a_{2n} \to 1) \\ a_{2n+1} = 0 \text{ cte. (en part } a_{2n+1} \to 0). \end{cases}$

c) $3^{\cos(n\pi)} = a_n$

$\cos(\pi) = -1$
$\cos(2\pi) = 1$.
$\cos(3\pi) = -1$
$\cos(4\pi) = 1$.
⋮

$a_n = \begin{cases} 3^1 & \text{si } n \text{ par} \\ 3^{-1} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$