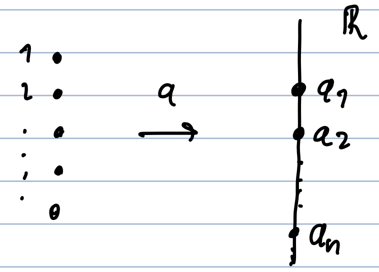
Algo de teórico sucesiones :

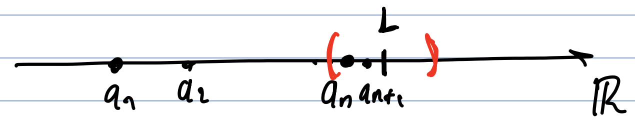


- Una sucesión en $\mathbb{R}$ es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

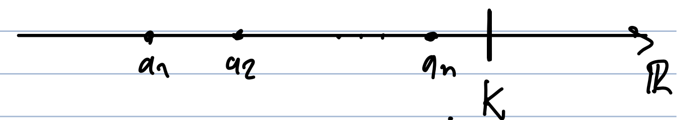
  * Podemos pensar la sucesión como
    - una función
    - un etiquetado de ptos de $\mathbb{R}$ indexado en los naturales.

- Límite : Decimos que la sucesión a (que a partir de ahora escribimos a_n) tiene límite L si se verifica

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0 \ |a_n - L| < \varepsilon$.



Caso $L = +\infty$: $\forall K > 0 \ \exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0 \ a_n > K$

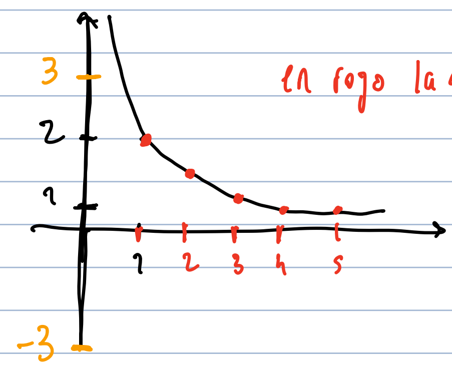


- a_n es creciente si $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n$. (estricta si desigualdad estricta)
- a_n está acotada si $\exists M$ tq $\forall n \ |a_n| < M$

$\boxed{\text{Pract 3}}$

1) a). $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$a(n) = 1 + \frac{1}{n}$.



en rojo la sucesión.

- obs : Si consideramos $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ entonces a_n es la restricción de f a $\mathbb{N}$.

- La sucesión está acotada : $|a_n| < 3$. (se puede ver gráficamente).

  Formalmente : $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ trivialmente $1 + 1/n > 1$

  Como $\frac{1}{n} \leq 1 \ \forall n$, trivialmente $1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$

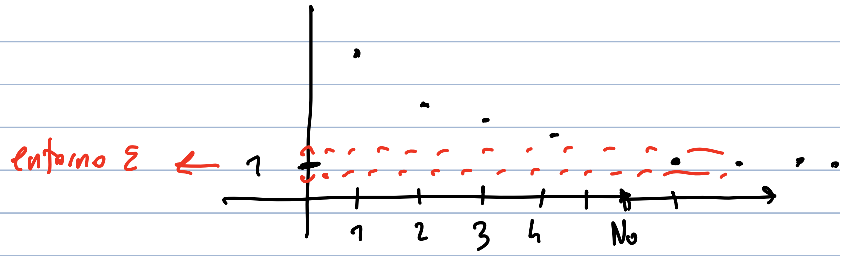
$\rightarrow \left(1 \leq 1 + 1/n \leq 2\right)$ acotada ✓.

- La suc. es monótona decreciente estricta:

Como $\frac{1}{n}$ mon. decreciente, $1+\frac{1}{n}$ también. $\left(a_{n+1} \leq a_n \right)$.

- Veamos que $a_n \xrightarrow{n} 1$;

Queremos ver que $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \text{ tq } \forall n \geq N_0 \ |a_n - 1| < \varepsilon.}$



$a_n - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{n} - \cancel{1} = \frac{1}{n}$

Queremos N_0 tq $\forall n \geq N_0$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$

esto pasa sii $\frac{1}{\varepsilon} < n$ $\rightarrow$ [Tomamos N_0 como el primer natural tal que $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.]

Por lo tanto conseguimos el N_0 (que depende de ε) para la def de límite.

c) $n + \frac{1}{n}$ $\left.\begin{array}{l} \cdot \ n \text{ tiende a } +\infty \\ \ \ \frac{1}{n} \text{ tiende a } 0 \end{array}\right\}$ $n+\frac{1}{n}$ tiende a $+\infty$.

e) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

- Monotonía : ¿ $\underset{\text{creciente}}{a_n \leq a_{n+1}}$ o $\underset{\text{decreciente}}{a_{n+1} \leq a_n}$ $\forall n$?

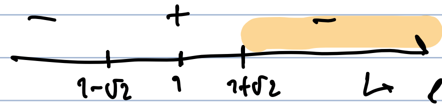
En definitiva queremos estudiar el signo de $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n^2}{2^{n+1}} = \frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$$

estudiamos signo de $-n^2+2n+1$.

↳ estudiamos signo de $-x^2+2x+1$.

↳ raíces $\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$.



↳ en esta zona se mantiene signo negativo

Por lo tanto si n en zona amarilla $\left(n > 1+\sqrt{2},\ \text{es decir } n \geq 3 \right)$

tenemos que $a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow a_n$ decreciente a partir de $n=3$

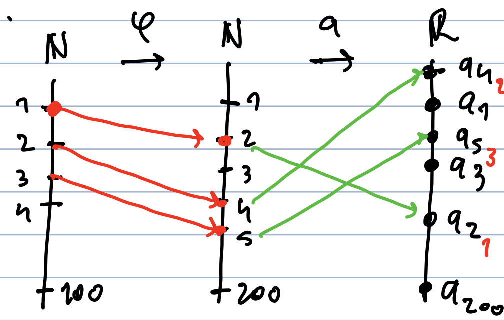
• <u>Afirmación</u>: Si mostramos que la suc. tiene límite, entonces está acotada.

Antes de calcular límite hablemos de subsucesiones.

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}.$$

mon. creciente e inyectiva

$a \circ \varphi$ subsucesión de a.



En otras palabras una subsucesión es una elección infinita de punto de la sucesión original, respetando orden.

Escribimos a la subsucesión como a_{n_k} donde la variable es el k

$$a_{n_1} = a_{\varphi(1)} = a \circ \varphi(1)$$

$$a_{n_2} = a_{\varphi(2)} = a \circ \varphi(2)$$

(en ejemplo del dibujo, tenemos $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 4$)

[• <u>Prop</u>: Si a_n tiene límite L, toda subsucesión tiene mismo límite.]

Volviendo a $a_n = \frac{n^2}{2^n}$.

Suponiendo que existe límite L, veamos que el límite es 0. $(a_n \to L)$.

Tomamos subsucesión de los pares: $a_{2n} = \frac{(2n)^2}{2^{2n}}$

$a_{2n} \to L$.

$$\text{Pero } \underset{n\to\infty}{\overset{\shortparallel}{\lim}} a_{2n} = \lim_n \frac{4}{2^n} \cdot \boxed{\frac{n^2}{2^n}} = 0 \cdot L = 0. \Rightarrow L = 0$$

tiende a 0 $a_n \to L$

¿Por qué necesariamente a_n tiene límite?

- a_n decreciente a partir de $n=3$.
- a_n positiva ($a_n \geq 0$).

Como a_n decreciente y acot inf, tiene límite.