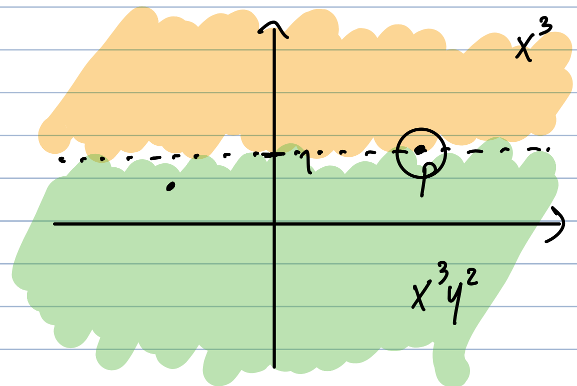
Práctico 8:

Deriv. direccional: $\dfrac{\partial f}{\partial (v_1,v_2)}(p_1,p_2) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(p_1+tv_1,\, p_2+tv_2) - f(p_1,p_2)}{t}$

Deriv. parcial: Son deriv. direccionales en las direcciones canónicas.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,\, y) - f(x,y)}{t}.$$

4) e) $f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases}$



Afirmación 1: f es continua.

Solo hay que corroborar continuidad en los puntos (x,y) con $y=1$.

Tomamos p con $p_2 = 1$ (p en línea punteada)

Queremos ver que $\lim\limits_{(x,y)\to p} f(x,y) = f(p)$.

Sii $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta$ tq $(x,y) \in B(p,\delta) \Rightarrow |f(x,y) - f(p)| < \varepsilon$.

Sii $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta$ tq $\begin{cases} (x,y) \in B^{\text{arriba}}(p,\delta) \Rightarrow |f(x,y) - f(p)| < \varepsilon & ① \\ (x,y) \in B^{\text{abajo}}(p,\delta) \Rightarrow |f(x,y) - f(p)| < \varepsilon & ② \end{cases}$

① se va a cumplir para cierto δ porque x^3 continua
② se va a cumplir para cierto δ' porque x^3y^2 continua

(tomamos el δ más chico y listo)

Afirmación 2: f tiene todas sus derivadas parciales y direccionales en las regiones (abiertas) correspondientes a $y>1$ e $y<1$

- Si $y>1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
- Si $y<1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y$.

(existencia y cont. de deriv parciales implica diferenciable)

A posteriori veremos que en estas regiones tenemos diferenciabilidad lo que nos permite calcular $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ en función de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

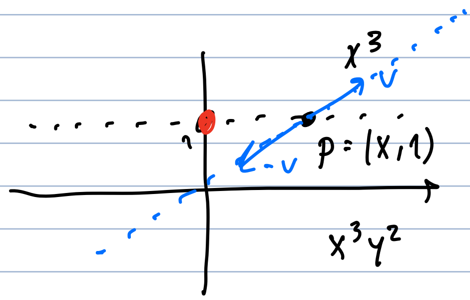
$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\, v_2 = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right), (v_1,v_2) \right\rangle$$

En este caso,

- $y>1$, $\frac{df}{dv}(\overset{p}{(x,y)}) = \langle (3x^2, 0), (v_1,v_2)\rangle = 3x^2 \cdot v_1$.

- $y<1$ $\frac{df}{dv}(x,y) = \langle (3x^2y^2, 2x^3y), (v_1,v_2)\rangle = 3x^2y^2v_1 + 2x^3y\, v_2$.

Ahora estudiamos el caso $y=1$:



Tomamos $p=(x,1)$, v dirección.
Suponemos $v_2>0$, $v_1 \neq 0$.

$$\frac{df}{dv}(p) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1, 1+tv_2) - f(x,1)}{t}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+tv_1, 1+tv_2) - f(x,1)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{(x+tv_1)^3 - x^3}{t}$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{(x+\overset{h}{tv_1})^3 - x^3}{\underset{h}{tv_1}}\right)}_{g'(x) \text{ con } g(x)=x^3} v_1 = 3x^2\cdot v_1.$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x+tv_1, 1+tv_2) - f(x,1)}{t} = \lim \frac{(x+tv_1)^3(1+tv_2)^2 - x^3}{t}$$

no vamos a hacer esta cuenta.

<u>Más fácil</u>:

$$\frac{df}{dv}(x,1) = \begin{cases} \xrightarrow{t>0} 3x^2\cdot v_1 & \text{(el } t>0 \text{ me dice que siempre estoy en región } y>1) \\ \xrightarrow{t<0} 3x^2v_1 + 2x^3v_2 & \text{(el } t<0 \Rightarrow \text{ estoy en región } y<1). \end{cases}$$

Por lo tanto $\frac{df}{dv}(x,1)$ existe sii $v_2=0$.

Por lo tanto en la recta $y=1$ solo existen deriv direccionales con dirección $(\underset{v_1}{\lambda}, \underset{v_2}{0})$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. $(x\neq 0)$.

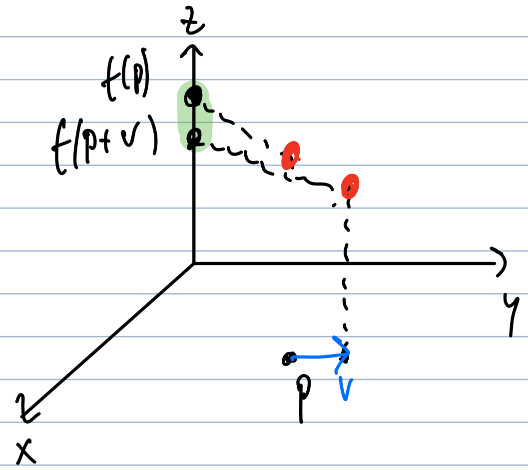
Sin embargo, si $x=0$ sí existen todas las deriv. direccionales.

Diferenciabilidad:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^2$.

Decimos que f es diferenciable en p si existe $T_{(p_1,p_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineal tq

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f((p_1,p_2)+(v_1,v_2)) - f(p_1,p_2) - T_{(p_1,p_2)}(v_1,v_2)}{\|v_1,v_2\|} = 0$$



¿Quién es la transf lineal?

$$T_{(p_1,p_2)}(v_1,v_2) = \frac{df}{dx}(p)\, v_1 + \frac{df}{dy}(p)\, v_2$$

$$= \left(\frac{df}{dx}(p), \frac{df}{dy}(p)\right) \cdot (v_1,v_2)$$

- esto se llama diferencial de f en p y se escribe $d_p f$
- Al vector $\left(\frac{df}{dx}(p), \frac{df}{dy}(p)\right)$ se lo llama gradiente de f en p y se escribe $\nabla f(p)$.

- Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^n si todas sus deriv parciales hasta orden n existen y son continuas.