Práctico 6 - Topología :

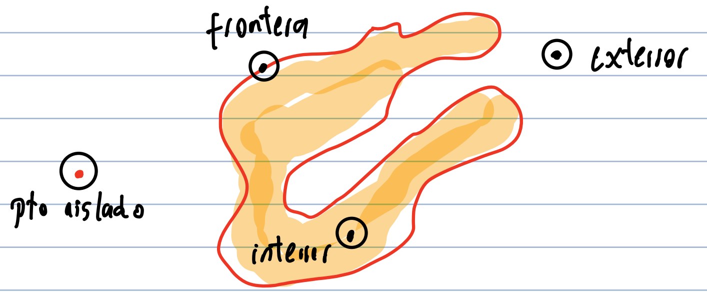
Conceptos para grabarse en la cabeza.

Tamos en $\mathbb{R}^n$ (espacio métrico, distancia usual)

- **Bola** : Una bola de centro $p \in \mathbb{R}^n$ y radio r es $B(p,r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) < r \}$.
- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto.

Decimos que un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es : exterior a A si existe r tq $B(p,r) \subset A^c$
interior a A si existe r tq $B(p,r) \subset A$
frontera de A si no es interior o exterior *

* Un pto p es frontera si $\forall r$ $B(p,r)$ verifica $B(p,r) \cap A \neq \phi$, $B(p,r) \cap A^c \neq \phi$.



En función de esto podemos definir el interior, exterior y frontera de A.

Notación : A° denota el interior de A. (o $\text{int}(A)$).
∂A denota la frontera o borde de A.

- **observación** : Los puntos exteriores de A son los interiores de A^c.
  $\hookrightarrow$ $ext(A) = (A^c)^\circ$

- Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es [abierto si $A = A^\circ$
  cerrado si A^c es abierto ($(A^c)^\circ = A^c$)

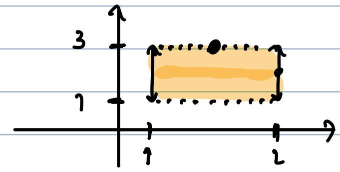
Obs : $\mathbb{R}^n$ y ϕ son abiertos y cerrados.

- Definimos la clausura de A como $\overline{A} = A \cup \partial A$ (**obs** : Si A cerrado $\Rightarrow \overline{A} = A$).
- Decimos que A es acotado si $\exists\, p \in \mathbb{R}^n, R \in \mathbb{R}$ tq $A \subseteq B(p,R)$.
- Decimos que A es compacto si es cerrado y acotado
- Un punto p es de acumulación de A si $\forall r$ $B^*(p,r) \cap A \neq \phi$. (**obs** : Un punto interior siempre es de acumulación)

bola reducida

2). a) Representar gráficamente. ¿el conj es acotado?
b) Hallar interior, frontera y clausura.
c) Hallar ptos de acum.
d) ¿Son abiertos?
e) ¿Son cerrados?
f) ¿Son compactos?

$$\boxed{A_1 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 1 < y < 3\}.}$$



A_1.

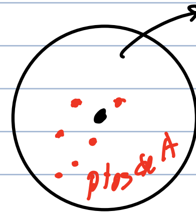
a) Es acotado.

b) · interior de A_1 es $A_1^\circ = \{(x,y) : 1 < x < 2,\ 1 < y < 3\}$.

· frontera de A es la unión de los lados del rectángulo. → $\left(\{(x,y) : x = 1,\ y \in [1,3]\}\right.$ un lado
así escriben los otros lados $\left.\right)$

• La clausura es todo el rectángulo (con los lados).
$\{ \quad 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3 \}$.

c). Los ptos de acum. coinciden con $\bar{A}_1$.

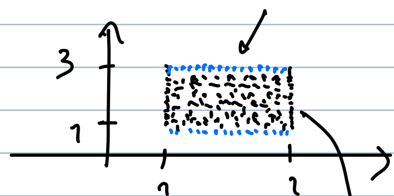


d) A no es abierto porque no todos sus ptos son interiores (tiene ptos frontera).

e) No es cerrado $\left(\right.$ dos formas de pensar: $\left[\right.$ Su complemento no es abierto
no tiene todos sus ptos del borde : $A \neq \bar{A}$ $\left.\right)$.

f) No es compacto. (pues no es cerrado).

$$\boxed{B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2} \longrightarrow$$



a) Es acotado ✓

b) · $\text{int}(B) = B^\circ = \phi$. $\mid$ $\forall p \in B\ \forall \varepsilon > 0\ B(p,\varepsilon) \not\subset B$, (Siempre hay ptos con coord irracionales)

· frontera de B : $\partial B = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$.

• $\bar{B} = B \cup \partial B = \partial B$ ↗

↓

$B \subset \partial B$.

Zoom

Adentro de la bola roja hay ptos de B y B^c.

c) <u>Acumulación</u>:

Todos los ptos frontera son de acumulación.

d) No es abierto : $\text{int}(B) = B^{\circ} = \phi \neq B$.

e) No es cerrado : Su complemento no es abierto.

f) No es compacto (no es cerrado).