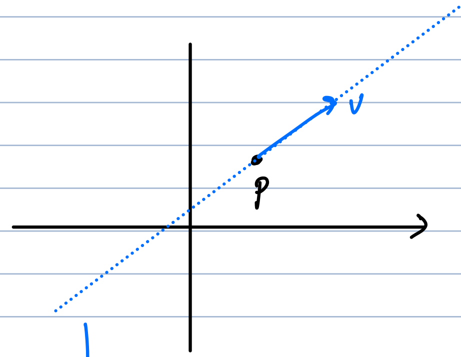
Práctico 8 : Diferenciabilidad

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Definimos la derivada direccional según v de f en p como

$$\frac{df}{dv}(p) := \boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}}$$

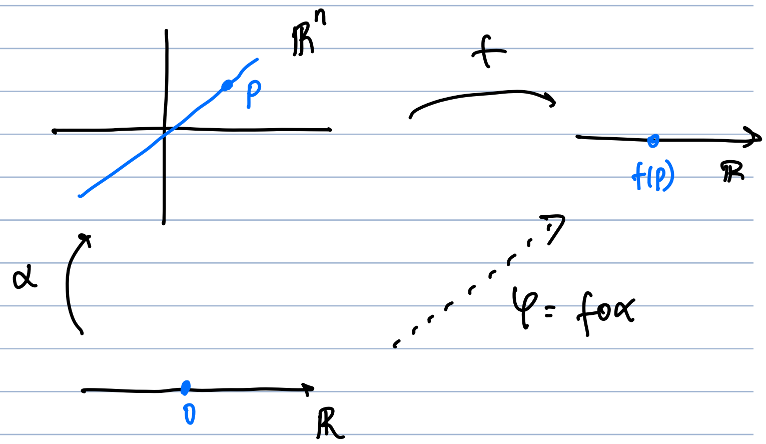


recta $\alpha(t) = p + tv$, con $\alpha(0) = p$.

Si $f(p+tv) = f(\alpha(t)) = \varphi(t)$

entonces podemos reescribir el límite así

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}} = \varphi'(0)$$



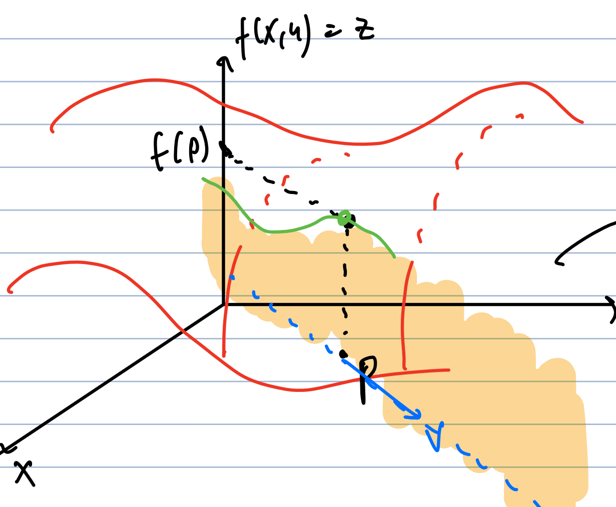
Las derivadas parciales son derivadas direccionales con direcciones de la base canónica.

Por ejemplo, si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$:

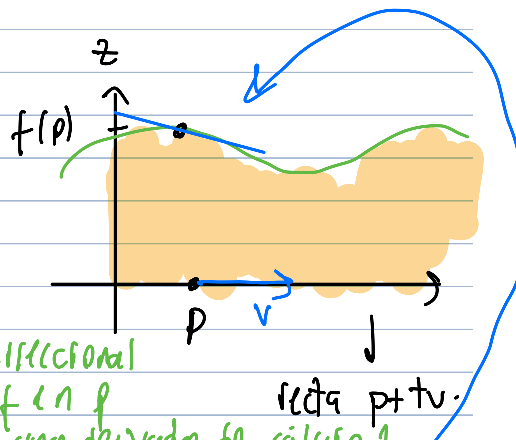
$$\boxed{\frac{df}{d(1,0)}(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t(1,0)) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + t, p_2) - f(p_1, p_2)}{t}}$$

$\hookrightarrow$ notación

Si esto v el gráfico de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



plano amarillo



La derivada direccional según v de f en p no es más que una derivada de cálculo 1.

Comentario: Para calcular derivadas parciales uno puede pensar a la variable que no está derivando como cte.

$\downarrow$

1) a) $f(x,y) = ax^{\alpha} + by^{\beta}$

$$\frac{df}{dx}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \quad (\text{definición}).$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{a(x+t)^{\alpha} + \cancel{by^{\beta}} - ax^{\alpha} - \cancel{by^{\beta}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{a(x+t)^{\alpha} - ax^{\alpha}}{t} = a\alpha x^{\alpha-1}$$

$$\frac{df}{dy}(x,y) = \underbrace{\frac{d}{dy} ax^{\alpha}}_{=0} + \frac{d}{dy} by^{\beta} = b\beta y^{\beta-1}$$

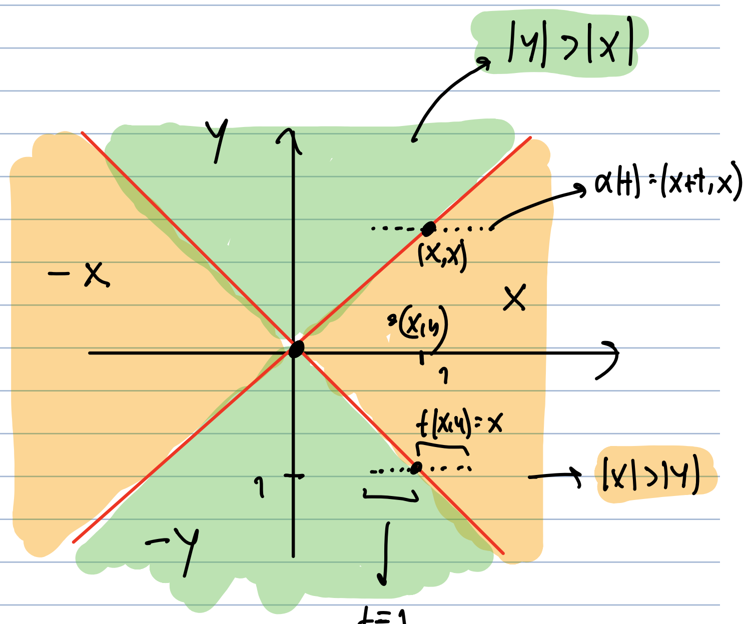
d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$.

$$(\operatorname{arctg}(u(x)))' = \frac{1}{1+u(x)^2} \cdot u'(x).$$

$$\frac{df}{dx}(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot y.$$

$$\frac{df}{dy}(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot x$$

g) $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$.



• **Afirmación**: Sabemos calcular $\frac{df}{dx}$ y $\frac{df}{dy}$ en las regiones de color (salvo rectas rojas)

⊛ • En región amarilla derecha, tenemos

• $\frac{df}{dx}(x,y) = \frac{dx}{dx}(x,y) = 1.$

$\alpha(t) = p + tv.$

- $\frac{df}{dy}(x,y) = \frac{df}{dx}(x,y) = 0$.

- Lo mismo con el resto

(*) Cuando $|x|>|y|$ y $x>0$

$f(x,y) = \max\{|x|,|y|\} = |x| = x$

- Veamos que pasa en las rectas rojas:

Supongamos que $x=y$ (es decir, (x,y) en recta roja) y que $x>0, y>0$

$$\frac{df}{dx}(x,x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t+x,x)-f(x,x)}{t} \begin{cases} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t+x,x)-f(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t+x-x}{t} = 1 \\ \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t+x,x)-f(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x-x}{t} = 0. \end{cases}$$

(observar que $f(t+x,x) = t+x$ si $t>0$
$f(t+x,x) = x$ si $t<0$.)

Por lo tanto $\nexists \frac{df}{dx}(x,x)$.

- ejercicio: dibujar conj. de nivel de f e intentar dibujar gráfico.

- Conclusión: No existen deriv. parciales en las rectas $x=\pm y$. En el resto si.

f) $f(x,y) = e^y \operatorname{sen}(x)$.

- $\frac{df}{dx}(x,y) = e^y \cos(x)$.
- $\frac{df}{dy}(x,y) = e^y \operatorname{sen}(x)$.

La función derivada parcial según x $\left(\frac{df}{dx}: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right)$.
Esta función también se puede derivar (deriv parciales).

2) c) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

$\frac{df}{dx}(x,y) = \cos(x^2+y^2).2x$

$\frac{df}{dy}(x,y) = \cos(x^2+y^2).2y$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x,y) = -\operatorname{sen}(x^2+y^2)\,2x \cdot 2x + \cos(x^2+y^2) \cdot 2.$$

- $$\frac{d^2 f}{dy\,dx}(x,y) = -2x \cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,2y.$$

son iguales.

- $$\frac{d^2 f}{dx\,dy}(x,y) = -2y \cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2) \cdot 2x.$$