Seguimos con pract 2 :

- Ec. lineales de primer orden homogénea : $x' + ax = 0$ (es var. separables)

$$x' = -ax \longrightarrow \frac{x'}{x} = -a$$

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int -a(t)\,dt$$

$$\log(|x|) = -A(t) \longrightarrow \left[x_H(t) = k.e^{-A(t)} \right]$$

- Ec. lineal primer orden no homogénea : $x' + ax = b$

Toda soluc. se puede escribir como $x_p + x_H$ con $\begin{cases} x_p \text{ soluc particular} \\ x_H \text{ soluc. homogénea} \end{cases}$

¿Cómo hallar la soluc. particular?

↳ método var. ctes : La idea es probar con alguien del estilo $\left[k(t).e^{-A(t)} \right]$

Lo meto en la ecuación $k'.e^{-A(t)} + \cancel{k(-a).e^{-A(t)}} + \cancel{a.k e^{-A(t)}} = b$

$$k'(t) = b.e^{A(t)}$$

$$\boxed{k(t) = \int b(s)e^{A(s)}\,ds}$$

Concluimos que la solución general se escribe como

$$\boxed{x(t) = x_p(t) + x_H(t) = e^{-A(t)}.\left(k + \int b(s) e^{A(s)}\,ds \right)}$$

A primitiva de a

3) a) 2) $t(t-1)x' + (1-2t)x = 0.$

(vamos a suponer $t \neq 0, t \neq 1$)

$$x' + \underbrace{\frac{(1-2t)}{t(t-1)}}_{a(t)} x = 0.$$

- La solución es $x(t) = e^{-A(t)}.k.$

Solo falta ver quién es $A(t)$. $\rightsquigarrow$ $A(t) = \int a(s)\,ds = \int \frac{1-2s}{s.(s-1)}\,ds$.

$$\to \int \frac{1}{s(s-1)} - \frac{2}{(s-1)}\,ds. = \int -\frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)} - \frac{2}{(s-1)}\,ds.$$

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)} = \frac{-\cancel{s}+1+\cancel{s}}{s(s-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$= \int -\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\,ds =$$

$$= -\left(\log(|t|) + \log(|t-1|)\right)$$

$$\left[A(t) = -\log\left(|t(t-1)|\right).\right]$$

$$X(t) = e^{-A(t)}.K = |t||t-1|.K.$$

3) b) 2 $\quad t(t-1)\,x' + (1-2t)\,x + t^2 = 0.$

$$x' + \underbrace{\frac{(1-2t)}{t(t-1)}}_{a(t)}\,x = \underbrace{\frac{-t^2}{t(t-1)}}_{b(t).}$$

La soluc. general es

$$x(t) = e^{-A(t)}\left(K + K(t)\right)$$

$$= e^{-A(t)}\left(K + \int b e^{A}\right).$$

Ya calculamos $A(t) = -\log\left(|t(t-1)|\right)$.

Solo falta calcular $\int b e^{A} = \int \frac{-t^2}{t(t-1)} \cdot \frac{1}{t(t-1)}\,dt$ (les dejo a usds terminar cuenta)

- Ec. dif. lineales de orden 2 homogéneas a coef. ctes.

$$\left[x'' + a x' + b x = 0\right] \quad \text{con } a, b \text{ ctes.}$$

A esta ecuación se le asocia pol. caract. $\lambda^2 + a\lambda + b$

- si el pol. caract. tiene dos raíces reales α_1, α_2 (distintas)

$\longrightarrow$ $X(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$ con c_1, c_2 constantes

- Si tiene raíz doble α_0

$$\longrightarrow \quad x(t) = c_1 e^{\alpha_0 t} + c_2 . t e^{\alpha_0 t}$$

- Si tiene raíces complejas conjugadas $\alpha \pm \beta i$

$$\longrightarrow \quad x(t) = c_1 e^{\alpha t} . \cos(\beta t) . + c_2 e^{\alpha t} . \operatorname{sen}(\beta t).$$

- Comentario: Cuando no son homogéneas, vale que las soluciones se escriben como $x_p + x_H$

4) a) 3) $x'' + 4x' + 5x = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 5$. Raíces son $-2 \pm i$

- La soluc. gral es $\boxed{x(t) = c_1 . e^{-2t} \cos(t) + c_2 e^{-2t} . \operatorname{sen}(t)}$

- Si fijo cond. iniciales $\begin{cases} x(0) = 1 & \rightarrow \text{posición inicial} \\ x'(0) = 0 & \rightarrow \text{velocidad inicial} \end{cases}$

tengo una única solución.

4.b.c.

- $x(0) = c_1$

$$x'(t) = c_1 (-2) e^{-2t} \cos(t) + c_1 e^{-2t} (-\operatorname{sen}(t)) + c_2 (-2) e^{-2t} \operatorname{sen}(t) + c_2 e^{-2t} . \cos(t).$$

- $x'(0) = -2c_1 + c_2$.

Entonces
- $c_1 = 1$
- $-2c_1 + c_2 = 0$

$\longrightarrow \boxed{c_1 = 1} \ \boxed{c_2 = 2}$

5) I $x'' + ax' - 2x = 0$

II $x'' - 2x' + ax = 0$.

Hallar a para que I y II tengan soluciones en común.

Si x solución de I y solución de II $\Rightarrow \cancel{x''} + ax' - 2x = \cancel{x''} - 2x' + ax$

(sup. $a \neq -2$) $\quad x'(a+2) - x(a+2) = 0.$

$\longrightarrow x' = x$

pero $x(t) = ke^{t}$ es solución de ambos $\quad x(t) = ke^{t}$

sii 1 es raíz de sus pol. caract.

$\to \quad \lambda^2 + a\lambda - 2 \to$ evaluado en 1 $\quad 1 + a - 2 \to a = 1$

$\to \quad \lambda^2 - 2\lambda + a. \to$ evaluado en 1 $\quad 1 - 2 + a$

• ¿Cómo hallar soluc. part. de las lineales no homog. de orden 2?

La idea es tantear con algo con un formato similar.

- $x'' + ax' + bx = \cos(m.x)$ ⟶ buscaré particular de la forma $A\cos(mx) + B\sin(mx)$.
- $x'' + ax' + bx = t^3 + t^2 - 1$ ⟶ buscaré particular que sea polinomio de grado 3.

Si aparecen exponenciales o combinaciones busco algo similar.