Topología:

· Vamos a trabajar en espacios métricos. (más en concreto en $\mathbb{R}^n$).

En el primer ejercicio trabajaremos con distancias:

1). Una norma en $\mathbb{R}^n$ es una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tq
- I • $N(x) \geq 0 \quad \forall x$.
- II • $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- III • $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
- IV • $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

normas en $\mathbb{R}^2$

a) 1) $N_1(x,y) = |x| + |y|$. Sí es norma ✓

$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$.

2) $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ también es norma ✓

3) $N_\infty(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$ también es norma ✓

4) $N(x,y) = |x+y|$. no es norma ✗.

Comentario: En general $N_p(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ es una norma en $\mathbb{R}^2$

· $N_1(x,y) = |x| + |y|$.

· $N_2(x,y) = \sqrt{|x|^2+|y|^2}$

· $N_\infty(x,y) = \lim\limits_{p\to\infty} N_p(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$.

$\left(\sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \to \max\{\alpha, \beta\} \right)$

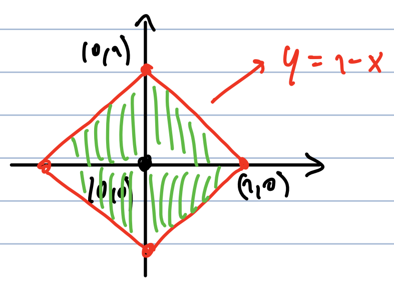
b) Dibujemos las bolas de las normas N_1, N_2, N_∞.

Si d_i distancia inducida por N_i

$B_i((x_0,y_0), r) = \{(x,y) : d_i((x,y),(x_0,y_0)) < r\}$

• $N_1(x,y) = |x| + |y|$. , Queremos $B_1((0,0),1)$.

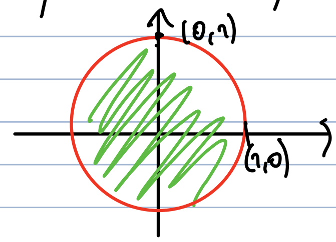
$= \{(x,y) : d_1((x,y),(0,0)) < 1\}$
$= \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$.

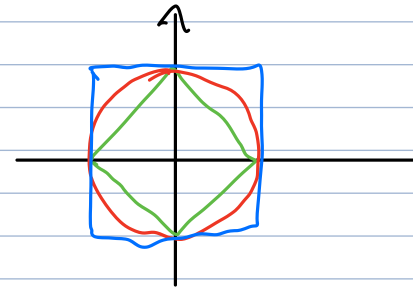


Si estamos en primer cuadrante $(x \geq 0, y \geq 0)$ la ecuación es $x+y<1$

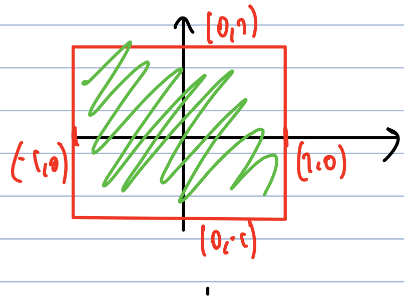
$y < 1-x$

- $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad d_2((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2}$





- $N_\infty(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$. $\quad B_\infty((0,0),1) = \{(x,y) : \max\{|x|,|y|\} < 1\}$.



¿Cuándo $N(x,y) = 1$. ?

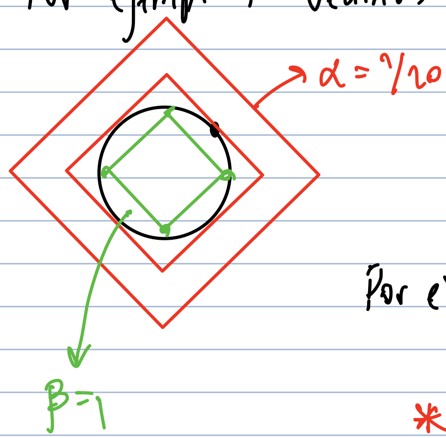
$$N(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$$
$$= 1 \text{ sii } \left[\begin{array}{l} |x|=1,\ |y| \le 1 \\ |y|=1,\ |x| \le 1. \end{array}\right.$$

c) Dos normas N, M son equivalentes si existen ctes $\alpha, \beta > 0$ tq

$$\alpha N_1(x,y) \le N_2(x,y) \le \beta N_1(x,y)$$

$$\frac{1}{\beta} N_2(x,y) \le N_1(x,y) \le \frac{1}{\alpha} N_2(x,y)$$

Por ejemplo, veamos $N_1 \sim N_2$. Buscamos α, β tq



$$\alpha N_1(x,y) \le N_2(x,y) \le \beta N_1(x,y)$$
$$\alpha(|x|+|y|) \le \sqrt{x^2+y^2} \le \beta(|x|+|y|).$$

*

por decir algo grande.

Por el dibujo podemos intuir que funciona con $\beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{10}$

* $\quad |x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$. $\Leftrightarrow$ (elevando al cuadrado)

$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$. $\qquad \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2\sqrt{x^2y^2} \geq \cancel{x^2}+\cancel{y^2}$ ✓

Comentario: Agrandar una norma achica las bolas!! (y al revés).

Si $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad 2N_2(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$

entonces $\quad N_2(x,y) = 1 \text{ sii } \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$2N_2(x,y) = 1 \text{ sii } \sqrt{x^2+y^2} = 1/2$